

КВАНТ⁺ МАЙ 2011 №3 ИЮНЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛЬ Российская академия наук	2 Звезды. <i>А.Долгинов</i> 10 Разрезания металлического прямоугольника. <i>М.Скопенков, М.Прасолов, С.Дориченко</i> 17 Склейки многоугольников. <i>Г.Шабат, А.Сгибнев</i>
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР В.В.Козлов	ЗАДАЧНИК «КВАНТА» 23 Задачи М2221–М2228, Ф2228–Ф2234 23 Решения задач М2199–М2205, Ф2213–Ф2219 30 Обобщение задачи М2200
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ <i>А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, П.А.Кожевников, С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)</i>	«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ 31 Задачи 34 Летний турнир имени А.П.Савина «Математика 6–8»
РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ <i>А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев</i>	КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА» 32 Гидроаэростатика
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА	ШКОЛА В «КВАНТЕ» 37 О законе Паскаля и физике сливного бачка. <i>А.Гимелев, С.Дворянинов</i> 39 Столкновения, рассеяние и небесные знамения. <i>А.Стасенко</i>
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР И.К.Кикоин	ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА 43 И снова задачи на сопротивление. <i>Е.Соколов</i>
ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА А.Н.Колмогоров	ОЛИМПИАДЫ 47 XIX Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон» 50 XVI Международный турнир «Компьютерная физика» 52 Избранные задачи Санкт-Петербургской городской олимпиады по математике
<i>Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер</i>	ИНФОРМАЦИЯ 53 Заочная школа СУНЦ НГУ 56 Ответы, указания, решения
	НА ОБЛОЖКЕ I <i>Иллюстрация к статье А.Долгинова</i> II <i>Коллекция головоломок</i> III <i>Шахматная страничка</i> IV <i>Прогулки с физикой</i>

Звезды

А.ДОЛГИНОВ

Межзвездная среда

Основной составляющей межзвездной среды, как и всей нашей Вселенной, является водород. Межзвездная среда очень неоднородна. Молекулы водорода сконцентрированы в гигантских молекулярных облаках диаметром около ста световых лет и массой около трех миллионов масс Солнца. Их температура в нашей Галактике составляет в среднем $-260\text{ }^\circ\text{C}$, причем в одном кубическом сантиметре содержится около тысячи молекул. Облака атомарного водорода с температурой $-150\text{ }^\circ\text{C}$ и концентрацией 20 см^{-3} окружены теплой межоблачной средой с температурой около десяти тысяч градусов и концентрацией $0,2\text{ см}^{-3}$. Горячие области сосредоточены в основном вблизи звезд, которые ионизируют газ своим ультрафиолетовым излучением. Самый горячий газ с температурой порядка 10^6 К остался от взрывов массивных звезд – сверхновых. Он очень разреженный, но заполняет почти половину Галактики.

Основные области межзвездного газа

Фаза	Температура, К	Плотность, см^{-3}	Доля объема в Галактике, %
Горячая	10^6	$3 \cdot 10^{-3}$	40 ± 25
Теплая	8000	0,25	50
Прохладная	80	40	3
Холодная	10	300	1

Межзвездная среда заполнена излучением, начиная от микроволнового и кончая гамма-излучением с высокой энергией. Не только звезды являются источником излучения, но и газ, и плазма межзвездной среды, а также есть излучение, которое сохранилось с самых ранних стадий развития нашей Вселенной. Наряду с атомами, молекулами и ионами водорода в межзвезд-

ной среде имеются сложные молекулы, причем как двухатомные, так и многоатомные. Концентрация таких молекул очень мала – всего одна десятимиллионная от количества водорода. Хотя этих молекул очень мало, их излучение иногда бывает вполне заметным. Сложный характер энергетических уровней таких молекул и широкий спектр длин волн излучений, распространяющихся в межзвездной среде, создают благоприятные условия для квантовых переходов того же типа, который лежит в основе лазеров. Такое излучение межзвездных молекул в микроволновом диапазоне длин волн называется мазерным излучением.

Еще одна составляющая межзвездной среды – это межзвездная пыль. Пылинки образуются в атмосферах холодных звезд, а также в результате химических реакций в межзвездной среде. Больше всего пылинок в сравнительно холодных облаках нейтрального газа. Пылинки имеют сложный состав. Они могут содержать силикаты, грязные льдинки, железо и т.д. По размеру пылинки не больше микрона, однако именно они ответственны за поглощение света звезд и, тем самым, за непрозрачность отдельных областей межзвездной среды. Есть целые участки неба, где поглощение не позволяет видеть удаленные звезды. Эти области носят название «угольных мешков». Такие «мешки» заслоняют от нас центральную область Галактики.

Расширяющиеся оболочки горячих звезд, которые ионизованы излучением этих звезд, образуют так называемые планетарные туманности. Скорость их расширения – порядка 20 км/с , размеры – около одной световой недели.

Для межзвездной среды характерны интенсивные турбулентные движения разных масштабов. В среднем скорость движения составляет $8 - 15\text{ км/с}$. Однако во многих случаях скорость оказывается сверхзвуковой, что ведет к появлению ударных волн различной протяженности. Энергия этих движений поступает в среду от взрывов сверхновых звезд, а также от сильных звездных ветров молодых и горячих звезд.

Наряду с более или менее регулярным магнитным полем Галактики в межзвездной среде существуют мелкомасштабные поля, которые сильно влияют на движение межзвездной плазмы. На магнитных полях, которые сжаты и усилены ударными волнами, происходит рассеяние и ускорение протонов и электронов окружающей плазмы.

Межзвездная среда имеет наибольшую среднюю плотность там же, где в основном сосредоточены звезды. Это, конечно, не случайно. Именно из межзвездной среды образуются звезды.

А еще межзвездную среду пронизывают космические лучи.

Эта статья – глава из книги известного советского и российского физика-теоретика Аркадия Захаровича Долгинова «Строение материи. От атомов до Вселенной». А.З.Долгинов является представителем старшего поколения ленинградской физической школы, он начинал свою научную жизнь еще под руководством Я.И.Френкеля и А.Ф.Иоффе, более четверти века заведовал отделом теоретической астрофизики в ФТИ им. А.Ф.Иоффе, является автором более двухсот работ и четырех монографий. Работая последние годы в США, А.З.Долгинов часть своего времени посвятил написанию упомянутой книги, в которой рассказал о любимой физике «просто о сложном», совсем без формул, чтобы любой любознательный и терпеливый читатель мог получить представление об этом грандиозном творении человеческого разума. Редакция предполагает опубликовать книгу целиком в одном из ближайших приложений к журналу.

Космические лучи

Даже вдали от медицинских рентгеновских аппаратов и радиоактивных веществ человек непрерывно облучается потоком быстрых частиц, идущих с неба. Это – космические лучи. Они состоят в основном из протонов с очень большой энергией, а также из небольшого количества электронов и быстрых ядер гелия, хотя встречаются и более тяжелые ядра. На каждый квадратный сантиметр земной атмосферы падает из космоса в среднем одна частица в секунду.

Космические лучи оказывают большое влияние на эволюцию живых существ. Пронизывая организм, они вызывают мутации, т.е. такие изменения, которые передаются потомкам.

Космические протоны обладают огромной кинетической энергией. В интервале энергий $10^{10} - 10^{14}$ эВ их интенсивность падает с увеличением энергии пропорционально энергии в степени 2,7. В интервале $10^{14} - 10^{15}$ эВ имеется небольшой избыток космических лучей, который, по-видимому, возник из-за вспышки сверхновой неподалеку (по астрономическим масштабам) от Солнечной системы. Затем интенсивность падает как энергия в третьей степени – вплоть до энергий $10^{18} - 10^{20}$ эВ. Основной вклад в состав космических лучей дают протоны с энергией от нескольких десятков миллионов до нескольких десятков миллиардов эВ. Число электронов с такой же энергией – не более одного процента от числа протонов.

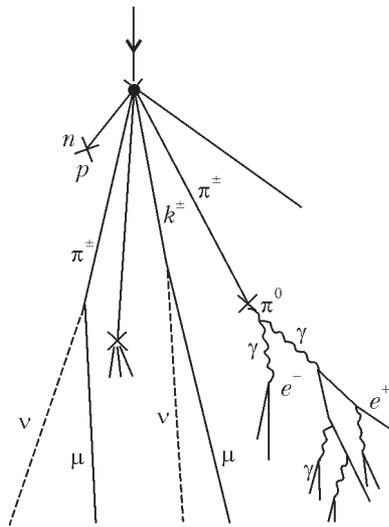


Рис.1. Схема возникновения ливня из различных частиц при столкновении протона космических лучей с молекулой воздуха

Космические лучи, проникая в атмосферу и сталкиваясь с молекулами воздуха, порождают ливни различных частиц. Магнитное поле Земли в значительной мере защищает нас от мягких космических лучей – они отклоняются этим полем и не попадают на поверхность Земли.

Ускорение протонов до скоростей, близких к скорости света, происходит в основном при рассеянии на магнитных полях ударных волн, которые возникают при взрывах сверхновых, а также на границах звездных ветров в межзвездном пространстве. Магнитное поле «вморожено» в плазму. Протоны не могут двигаться поперек поля и отражаются от неоднородностей магнитного поля на фронте ударной волны. При этом они получают энергию, подобно тому как получает энергию мячик при лобовом столкновении с мчащимся автомобилем. Те протоны, которые, отражаясь и многократно рассеиваясь в окружающей плазме, снова и снова возвращаются к удар-

ной волне, могут очень сильно увеличить свою энергию. Таких протонов, конечно, немного – всего одна миллиардная доля от общей концентрации протонов межзвездной плазмы, но их энергия может достигать очень большого значения. В среднем кинетическая энергия одного протона космических лучей составляет около 10^9 эВ. Скорость протона с такой энергией равна 0,88 скорости света.

Частицы могут ускоряться не только на магнитных полях ударных волн, но и на хаотических магнитных полях межзвездной среды. Картина похожа на ту, которую можно наблюдать в газе, состоящем из крупных и мелких частиц. Крупные частицы будут передавать свою энергию мелким частицам при столкновении с ними, пока средняя энергия всех частиц не станет одинаковой. Это означает, что скорость мелких частиц будет много больше, чем крупных. Магнитные поля, переносимые движениями плазмы, отклоняют заряженные частицы, передавая им при этом часть своей энергии. Наибольшая наблюдаемая энергия космической частицы достигает $10^{20} - 10^{21}$ эВ. Такую энергию имеет, например, свинцовая пуля массой 0,5 г, выпущенная из ружья со скоростью 800 м/с. Согласно одной из гипотез, такие энергии могут быть получены протонами в магнитных полях вблизи быстро вращающейся черной дыры.

Хотя концентрация частиц космических лучей в нашей Галактике всего 10^{-10} см⁻³, т.е. в миллиард раз меньше, чем средняя концентрация частиц межзвездной среды, общая энергия космических лучей велика, а их давление равно давлению газа и плазмы в Галактике.

Почему зажигаются звезды

При сжатии протозвездного облака, т.е. по сути при падении наружных слоев к центру, выделяется гравитационная энергия. Это приводит к первоначальному нагреву и образованию звезды. Если сжимающаяся масса достаточно велика для того, чтобы температура внутри достигла нескольких миллионов градусов, то начинаются термоядерные реакции. Для начала реакции надо, чтобы протоны приобрели достаточную энергию, смогли преодолеть взаимное электрическое отталкивание и сблизиться на малое расстояние (около 10^{-13} см), где ядерные силы становятся больше электрических, что позволяет протонам объединиться. Самой первой начинается реакция превращения водорода в гелий, когда при столкновении протонов (ядер водорода) образуется ядро гелия. Эта реакция происходит при температуре в семь миллионов градусов. При несколько более высокой температуре, в десять–пятнадцать миллионов градусов (все зависит от плотности вещества), начинается также углеродно-азотно-кислородный цикл. В этом цикле в результате столкновений с участием ядер углерода, азота и кислорода опять-таки исчезают четыре протона и появляется ядро гелия. Если температура еще выше, то более тяжелые ядра последовательно объединяются в еще более тяжелые с выделением энергии в виде гамма-квантов, а также в виде кинетической энергии образовавшихся ядер. Тер-

моядерные реакции полностью прекращаются, когда образуются ядра железа. Для образования ядер тяжелее железа пришлось бы затратить, а не получить энергию. Дело в том, что в тяжелых ядрах электрическое отталкивание почти уравнивает ядерные силы притяжения, и такие ядра могут самопроизвольно распасться, особенно при столкновениях. Все тяжелые ядра образуются в звездах и выбрасываются оттуда при взрывах звезд. Почти все элементы, из которых состоит человек, когда-то были образованы в звездах.

Какие бывают звезды

В нашей Галактике имеется около миллиона миллионов звезд. Несмотря на то, что массы звезд отличаются друг от друга не более чем в тысячу раз, их светимости, температуры и размеры могут различаться во много тысяч раз. Наиболее массивные звезды лишь в 50–100 раз больше Солнца по массе, но ярче его в 10000 раз и крупнее в 100 раз. Самая яркая звезда LBV 1806-20 в 50 миллионов раз ярче Солнца. Есть одиночные звезды, подобные нашему Солнцу, но не менее половины всех звезд входят в состав двойных или даже кратных систем. Двойные звезды – это системы из двух отдельных звезд, которые связаны полем тяготения и обращаются вокруг общего центра масс. Эти звезды порой сильно влияют друг на друга своими гравитационными полями, вызывая огромные приливы, изменяя собственное вращение и орбитальное движение. Кроме того, во многих случаях вещество с поверхности одной из звезд может перетекать на другую.

В настоящее время удалось наблюдать планеты, принадлежащие звездам различного типа. Наличие планет возле звезд, по-видимому, является скорее правилом, чем исключением. Планеты отличаются от звезд своей массой, которая слишком мала для начала ядерной реакции. Планеты возникают из того же протозвездного облака, из которого образовалась звезда.

Свойства и развитие одиночных звезд во многом отличаются от звезд в двойных системах. Начнем с рассмотрения звезд-одиночек.

Все звезды возникают при гравитационном сжатии межзвездного вещества. Как и в случае Солнца, небольшие случайные сгущения начинают расти под действием сил тяготения, пока не исчерпается вещество в ближайшем окружении или пока данное сгущение не будет разорвано притяжением соседних сгущений. В нашей Га-

лактике в год появляются примерно десять новорожденных звезд. Кроме сил гравитации, в межзвездной среде действуют и магнитные силы. Принимая, что магнитное поле уже имеется, можно, во-первых, сказать, что оно будет способствовать образованию протозвездного сгущения, так как в области случайного изгиба магнитных линий будут концентрироваться ионы, т.е. будет возникать локальное увеличение массы. Во-вторых, магнитное поле может передать часть углового момента соседним областям межзвездной среды, уменьшив, тем самым, скорость вращения внутренней области. С увеличением плотности протозвездного облака степень его ионизации уменьшается, электропроводность падает, и магнитная связь с окружающей средой прекращается. В процессе сжатия центральной

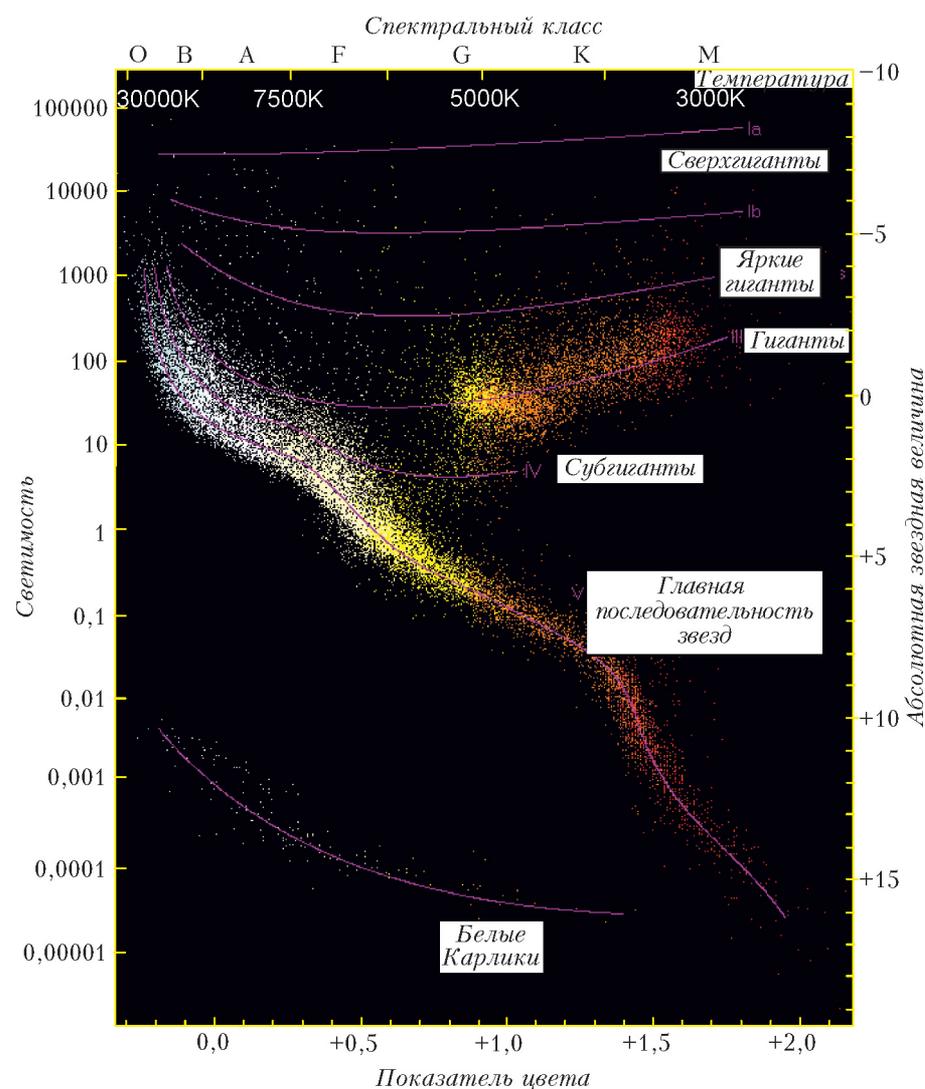


Рис.2. Диаграмма Герцшпрунга–Рассела – зависимость абсолютной звездной величины (светимости) от температуры (показателя цвета) звезд. Температура дана в кельвинах. Солнце находится среди желтых звезд (спектральный класс G, светимость 1). Слева вверху расположены самые массивные и горячие звезды, а справа – красные гиганты. Слева внизу лежат белые карлики. Коричневые карлики – самые тусклые и холодные. Разница в одну абсолютную звездную величину означает разницу в 2,512 раз в яркости звезды. Для удобства классификации звезд их обычно объединяют в спектральные классы – в зависимости от температуры. Самые яркие относят к классу O, затем идут классы B, A, F, G, K и M. В отдельную группу относят белые карлики (WD) и нейтронные звезды (NS)

части протозвездного облака она разогревается все больше и больше и, наконец, превращается в звезду. Дальнейшая судьба звезды зависит от ее массы. Следует сразу отметить, что зависимость эволюции звезды от ее массы все же приближительная. Она определяется составом звезды и влиянием соседних звезд. В процессе эволюции данная звезда может сбросить или приобрести какую-то массу. Рассмотрим несколько отдельных случаев.

1) Если масса звезды в несколько раз меньше, чем у Солнца, то температура даже в самом центре не достигнет величины, необходимой для начала ядерных реакций с участием самого распространенного легкого изотопа водорода. В этом случае возникающая звезда будет излучать свет в основном в красной и инфракрасной областях спектра, постепенно остывать, превращаясь в так называемый коричневый карлик с массой в среднем около 50 масс Юпитера, пока, через несколько миллиардов лет, не погаснет совсем. Коричневый карлик светит за счет гравитационной энергии, которая переходит в тепловую энергию при сжатии звезды в процессе ее образования из протозвездного облака.

2) Если масса звезды раза в три меньше, чем у Солнца, то в центре звезды температура достигнет девяти миллионов градусов, что достаточно для начала термоядерной реакции синтеза гелия из водорода. Такая звезда будет красным карликом. В центральной области этого карлика перенос энергии осуществляется излучением, а в наружных областях – конвекцией. В звездах с массой меньше, чем одна треть солнечной массы, лучистое ядро вообще не возникает.

3) Если масса звезды близка к массе Солнца, а таких звезд в нашей Галактике несколько миллиардов, то температура в центре достигает пятнадцати миллионов градусов, и там возможны реакции превращения водорода в гелий как при непосредственном взаимодействии протонов, так и в углеродно-азотном цикле. Цвет звезды будет желтым. Когда водород почти весь выгорит, центральная часть начнет сжиматься, и температура ее будет увеличиваться, достигая сорока миллионов градусов. Но этого еще недостаточно для начала так называемой тройной гелиевой реакции. Сжатие остановится, когда все электроны во внутренней части звезды займут все доступные для них уровни энергии и дальнейшее сжатие станет невозможным. Наружные же области звезды, нагретые горячим ядром, начнут расширяться, но температура их будет падать, и звезда станет красным гигантом. Этот гигант поглотит ближайшие планеты, если такие имеются. По сути дела, красный гигант – это белый карлик, окруженный обширной конвективной оболочкой, на внутренней границе которой возможны термоядерные реакции. В конце концов наружные части уйдут и рассеются в пространстве, и останется только ядро звезды – белый карлик. Именно такой будет судьба нашего Солнца через несколько миллиардов лет.

4) Если звезда в десять раз массивнее Солнца, то ее радиус будет в три с половиной больше, чем у Солнца. Температура в центре составит двадцать семь милли-

онов градусов, на поверхности – двадцать пять тысяч градусов, а светимость будет в три тысячи раз больше, чем у Солнца. Основным источником энергии будет углеродно-азотный цикл. В центральной части такой звезды излучение не справляется с переносом энергии, и перенос энергии осуществляется конвекцией. Звезды с массой от одной до десяти масс Солнца в конце концов превращаются в белые карлики.

5) Внутри еще более массивных звезд вступают в термоядерную реакцию более тяжелые элементы, пока не образуется железо, которое является наиболее устойчивым элементом. Эти звезды относятся к классу голубых гигантов. Типичная температура на поверхности равна 25–75 тысяч градусов. Голубые гиганты быстро расходуют свое горючее, и время их жизни, по звездным масштабам, сравнительно невелико. Такая

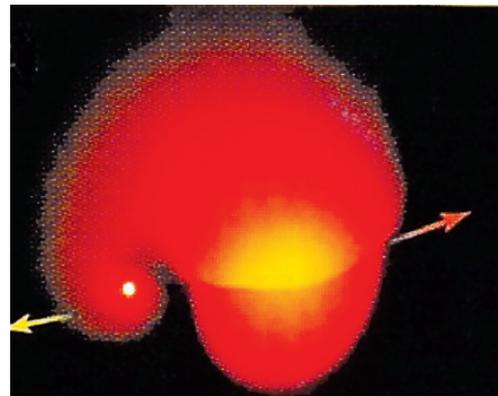


Рис.3. Схема столкновения белого карлика и красного гиганта – белый карлик проходит через тело красного гиганта, разрушая его

звезда взрывается как сверхновая, а остаток превращается в нейтронную звезду или в черную дыру.

В конце концов все звезды перестают излучать, когда все виды горючего, доступного для звезд данной



Рис.4. Плотная газо-пылевая оболочка звезды Эта Киля, которая является гигантом и одним из самых ярких звездных объектов. Возможно, что это двойная звездная система. Наблюдался ряд вспышек этой звезды. Размер ее оболочки вдвое превышает размер Солнечной системы

массы, уже исчерпаны и исчерпано также тепло, запасенное в активный период жизни звезды.

Звезды разделены огромными расстояниями, поэтому столкновения звезд очень редки. При лобовых столкновениях обычных звезд они либо разрушаются и превращаются в туманность (при большой скорости столкновения), либо сливаются и объединяются в единую звезду. Если столкновение не лобовое, то звезды могут образовать двойную систему. При столкновениях белого карлика с красным гигантом разрушается красный гигант, а белый карлик уходит. Наиболее грандиозная вспышка происходит, когда черная дыра разрывает, а затем поглощает звезду.

Изменение массы звезды может изменить характер протекающих там ядерных реакций. Реакции могут возникнуть не только внутри, но и на поверхности горячей звезды, если туда попадет достаточное количество водорода от соседней звезды. Именно это происходит при вспышках так называемых новых звезд.

Колебания звезд

Имеется целый ряд звезд, яркость которых периодически изменяется. Среди них наиболее интересны так называемые цефеиды. Причина колебаний яркости цефеид следующая. Температура всех звезд падает по направлению к поверхности, и степень ионизации атомов уменьшается. В частности, в цефеидах меняется степень ионизации гелия, температура ионизации которого 40000 К. Началом процесса может служить небольшое увеличение потока энергии из недр звезды, что ведет к дополнительному нагреванию верхних слоев звезды. Эти слои расширяются, плотность их уменьшается, и уменьшается поглощение энергии, которая идет из глубины. Ионы гелия захватывают электроны, превращаясь в атомы гелия. Газ становится прозрачным, а выделяющаяся энергия в виде излучения уходит наружу. Вещество охлаждается, давление уменьшается, и под действием тяготения верхние слои звезды сжимаются. Это снова ведет к нагреву, ионизации гелия и увеличению числа свободных электронов и ионов. Газ (точнее – плазма) становится менее прозрачным и активно поглощает идущее снизу излучение, давление увеличивается, оболочка звезды снова расширяется, и процесс повторя-

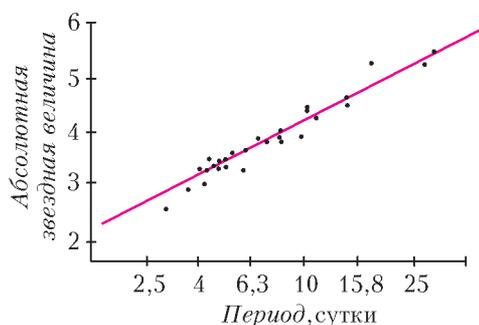


Рис.5. Зависимость абсолютной звездной величины цефеид от периода колебаний блеска. Точками обозначены данные наблюдений для ряда звезд

ется. Теперь можно забыть о первоначальном толчке. Процесс будет сам себя поддерживать. Конечно, такой режим возможен далеко не всегда. Для этого надо, чтобы периоды изменения скорости ионизации были близки к периодам, которые необходимы для нагрева и изменения плотности вещества звезды. Именно такие условия существуют у цефеид.

Период колебаний зависит от массы звезды и, тем самым, от ее истинной яркости (т.е. светимости). Чем дальше от нас звезда, тем меньше ее наблюдаемая яркость. Сравнивая яркость, которая должна быть у звезды с данным периодом, с наблюдаемой яркостью, можно определить расстояние до звезды.

Пятнистые звезды

Среди молодых горячих звезд есть звезды, поверхность которых химически неоднородна. Это звезды класса Ap. На поверхности этих звезд имеются обширные пятна, где обилие разных химических элементов, в частности гелия, сильно отличается от обилия этих же элементов в соседних областях звезды. Кроме того, такие звезды обладают сильным магнитным полем, которое много сильнее, чем поле подобных звезд (класса A), но не имеющих пятен. Надо сказать, что до сих пор нет ясного понимания, в чем здесь дело. Хотя магнитное поле препятствует перемещению вещества и у поверхности этих звезд нет заметной конвекции, все же непонятно, как пятна возникли и почему они долго существуют. Следует все же отметить, что такие химические неоднородности могут работать подобно электрической батарейке, создавая электрический ток и связанное с ним локальное магнитное поле.

Белые карлики

Белые карлики – это конечная стадия эволюции многих звезд. Размер их мал – радиус в сто раз меньше, чем радиус Солнца, но плотность огромна: объем величиной в коробок спичек имеет массу в несколько тонн. Плотность белых карликов столь велика, что электроны внутри звезды занимают все нижние разрешенные уровни энергии. Напомним, что импульс, а значит, и энергия электронов увеличиваются при уменьшении объема, который они занимают. Это препятствует сжатию белого карлика. Только в том случае, если масса очень велика, сжатие может продолжиться путем поглощения электронов протонами, что приводит к возникновению нейтронной звезды. Типичные магнитные поля белых карликов находятся в интервале от 10^3 до 10^7 гауссов.

Белые карлики светятся ярко, но не за счет ядерных реакций внутри, а за счет тепла, запасенного в недрах, хотя в отдельных случаях термоядерные реакции продолжают в тонком слое и на небольшой глубине. Тепла, запасенного в недрах, достаточно, чтобы светить миллиарды лет. Типичные температуры поверхности – от 15000 до 50000 градусов. Цвет белых карликов вовсе не всегда белый. Они могут быть красными, желтыми или белыми – в зависимости от температуры поверхности.

«Новые» звезды – вовсе не новые

Явление, которое астрономы называют «новой» звездой, это яркая вспышка обычно слабой, но уже известной звезды. Дело в том, что все эти звезды входят в состав системы из двух звезд. Одна из этих звезд – белый карлик, а другая – красный гигант. Вещество из оболочки гиганта под действием притяжения горячего белого карлика перетекает на этот карлик, и при достижении некоторой критической массы на поверхности карлика начинается термоядерная реакция превращения водорода в гелий. При этом очень быстро возрастает температура, происходит термоядерная вспышка, вещество выбрасывается, и мы видим яркую «новую» звезду. Такой процесс может повторяться неоднократно.

Сверхновые звезды

В 1054 году китайские ученые, которые тогда были далеко впереди европейцев, отметили появление очень яркой звезды – теперь ее называют сверхновой. К настоящему моменту подобные вспышки наблюдались неоднократно как в нашей, так и в соседних галактиках. Эти вспышки во много раз ярче вспышек «новых» звезд и имеют совсем другую природу.

По-видимому, сверхновые возникают при эволюции красных гигантов. Мы уже отмечали, что при достаточно большой массе звезды термоядерные реакции приводят к образованию тяжелых элементов, вплоть до железа. При прекращении этих реакций ослабевает и тепловое движение, которое уже не может противостоять тяготению. Внутренность звезды начинает сжиматься, причем под тяжестью наружных слоев это сжатие происходит почти со скоростью свободного падения. Внутри возникает газ вырожденных электронов, но даже они не в силах удержать эту тяжесть. Гравитационная энергия падения наружных слоев увеличивает температуру и плотность ядра. Когда темпе-



Рис.б. Крабовидная туманность – остаток взрыва сверхновой звезды 1054 года. Размер – 6 световых лет. В центре туманности расположена нейтронная звезда

ратура достигнет $5 \cdot 10^9$ градусов, а плотность возрастет до 10^{10} г/см³, протоны начнут поглощать электроны и, испуская нейтрино, превращаться в нейтроны. Нейтроны будут занимать все доступные для них нижние энергетические уровни, и ядро звезды станет подобным гигантскому атомному ядру, состоящему в основном из нейтронов. Падение внешних слоев уже не может сжать такое ядро. Энергия падения очень велика, и, натолкнувшись на почти непреодолимое препятствие, эти слои отразятся и отскочат, как мячик, в окружающее пространство. Это будет выглядеть как колоссальный взрыв и появление сверхновой звезды. При этом выделится около 10^{51} эрг энергии. В максимуме блеска сверхновая звезда излучает, как миллиард Солнц, т.е. как некрупная галактика.

Излучение взрыва сверхновой покрывает весь диапазон от радио- до гамма-лучей. Так называемые гамма-всплески, по-видимому, тоже возникают при этих взрывах. Остатки выброшенной оболочки образуют небольшую туманность, которая расширяется со скоростью в несколько тысяч километров в секунду, образуя ударную волну на фронте. В конце концов туманность рассеивается в пространстве и исчезает, а оставшееся ядро становится нейтронной звездой.

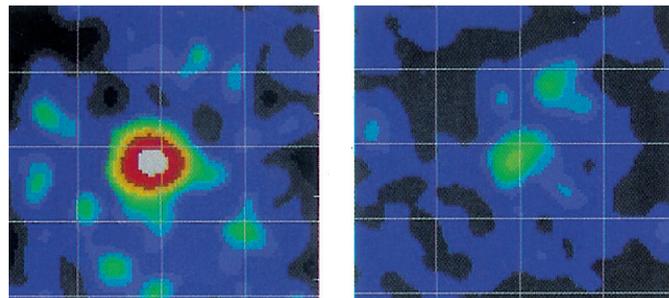


Рис.7. Снимок гамма-всплеска, полученный спутником BeppoSAX в феврале 1997 года. Слева – через восемь часов, а справа – через три дня после максимума вспышки

Появление сверхновых в крупной галактике наблюдается в среднем каждые 30–50 лет. Существуют два основных типа сверхновых: SN I и SN II. По-видимому, их отличие связано в первую очередь с отличием в составе этих звезд. В частности, в спектрах SN II наблюдается водород, которого нет в SN I.

Нейтронные звезды

Радиус нейтронной звезды всего около десяти километров, а масса лишь вдвое меньше массы Солнца. Плотность вещества в центре звезды достигает тысячи миллионов миллиардов граммов в кубическом сантиметре (10^{15} г/см³). Звезда, сжимаясь, должна сохранять свой момент импульса, т.е. должна вращаться все быстрее и быстрее. Нейтронная звезда, возникшая в процессе сжатия центральных областей при взрыве сверхновой звезды, должна вращаться исключительно быстро. И действительно, периоды вращений нейтронных звезд лежат в интервале от нескольких секунд до тысячных долей секунды. Хотя возможность существования нейтронных звезд была давно предсказана советским ученым Л.Ландау, они были открыты современ-

но случайно. Наблюдения над слабой звездочкой, которая находилась на месте остатка взрыва сверхновой, показало, что излучение этой звездочки периодически изменяется, причем период сохраняется с высочайшей точностью. Наблюдатели даже сначала подумали, что это сигналы внеземной цивилизации и опубликовали свои результаты только тогда, когда обнаружили еще несколько подобных звезд. Вопрос окончательно прояснился, когда было измерено магнитное поле этих объектов. Оно оказалось безумно большим, а именно – тысячи миллиардов гауссов. Магнитное поле такой звезды вытягивает в нитку электронные оболочки атомов. Это поле имеет дипольный характер. Напомним, что самое сильное поле, которое удалось получить на Земле, – всего несколько тысяч гауссов. У большинства нейтронных звезд поле не превышает 10^{12} гауссов. Максимальное же поле, которое наблюдалось, достигало 10^{15} гауссов. Такие звезды называются магнитарами. Их поле столь сильно, что приводит к поляризации вакуума вокруг звезды.

Вращающийся магнит излучает электромагнитные волны. Электроны при движении в магнитном поле также излучают электромагнитные волны и дают свой вклад в общее излучение звезды. Излучение нейтронной звезды идет в основном из областей у полюсов магнитного диполя. Направление оси магнитного диполя далеко не всегда совпадает с осью вращения. Излучение можно обнаружить только в то время, когда при вращении нейтронной звезды ось диполя направлена в сторону Земли. Поэтому наблюдаемое излучение, подобно маяку, пульсирует с периодом, равным периоду вращения нейтронной звезды. Такие нейтронные звез-

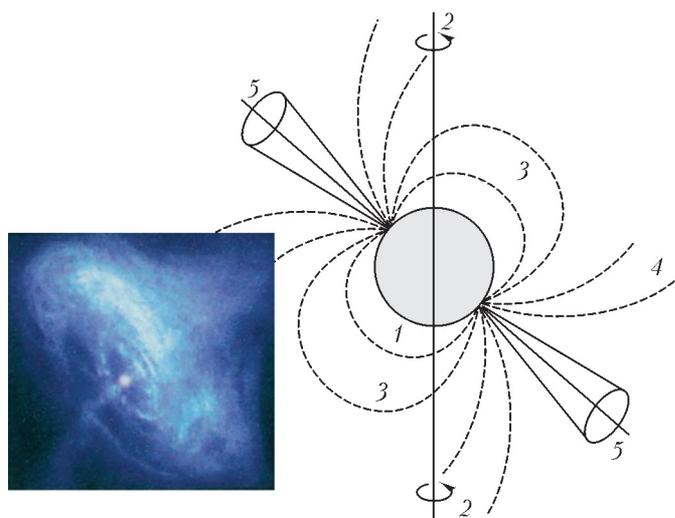


Рис.8. Схема пульсара (справа): 1 – нейтронная звезда, 2 – ось вращения, 3 – линии магнитного поля, образующие ловушку для электронов и ионов, 4 – линии, связанные с околозвездными полями, 5 – области вокруг магнитной оси, откуда выходит излучение. Слева дан снимок Крабовидной туманности, полученный в рентгеновских лучах из космоса рентгеновской обсерваторией «Чандра». В центре снимка виден пульсар, вращающийся со скоростью 30 оборотов в секунду, и видна струя, идущая из центра. Пульсар окружен вихрем вещества, уходящего из области пульсара со скоростью, равной почти половине скорости света

ды называют пульсарами. Конечно, не во всех случаях ось магнитного поля совпадает с лучом зрения. Поэтому пульсары обнаружены только в некоторых остатках сверхновых. Потеря энергии при интенсивном излучении замедляет вращение нейтронной звезды. Более старые нейтронные звезды вращаются медленнее, чем молодые.

Если какое-либо вещество падает на поверхность нейтронной звезды, то скорость падения оказывается близкой к скорости света. Нейтронные звезды входят в состав двойных систем столь же часто, как и все остальные звезды, поэтому вещество, перетекающее на нейтронную звезду в тесной двойной системе, выделяет огромную энергию. Излучение различных нейтронных звезд простирается от радио-диапазона до рентгеновского – в зависимости от того, каков возраст звезды и входит ли она в двойную систему.

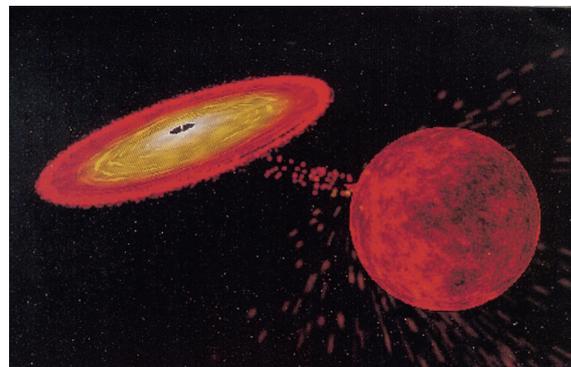


Рис.9. Схема перетекания вещества от обычной маломассивной звезды на нейтронную звезду (пульсар SAX J 608.4-3658) в двойной звездной системе. Пульсар окружен диском из вещества, текущего от соседней звезды

Под самой поверхностью нейтронной звезды, где плотность еще не слишком велика, существует обычная плазма из ионов и электронов. В более глубоких слоях плазма становится твердой, образуя кристалл. Высокая плотность приводит к вырождению электронов. При еще большей плотности протоны поглощают электроны, превращаясь в нейтроны. Эти нейтроны также становятся вырожденными. В нейтронной среде появляются нейтронные пары, подобные парам электронов в сверхпроводнике, и среда становится сверхпроводящей. Электроны при этом не объединяются в пары. Вращение нейтронной звезды приводит к образованию нитевидных вихрей в сверхтекучей жидкости, внутри которых условия сверхтекучести и сверхпроводимости нарушаются. Это создает небольшую вязкость и сопротивление электрическому току. В самом центре звезды, где температура достигает миллиарда градусов, а плотность составляет 10^{15} г/см³, вещество, возможно, состоит из кварков, глюонов и пи-мезонов.

Черные дыры

Масса звезды может быть столь велика, что даже давление вырожденной нейтронной среды не спасает ее от дальнейшего сжатия. В конце концов она сжимается до такого объема, что тяготение не позволяет даже

свету покинуть ее поверхность. Луч света пойдет по криволинейной траектории, огибая звезду, но не покидая ее. Хотя никакое излучение не может покинуть поверхность черной дыры (этим и определяется размер дыры), не следует думать, что дыра на самом деле невидима. Если какая-либо звезда окажется вблизи дыры, она будет разорвана тяготением, прежде чем поглотится дырой, и можно будет увидеть свет от такого события. Газовые потоки, которые втягиваются в дыру, сталкиваются друг с другом, что также ведет к излучению на разных частотах. Конечно, во всех случаях мы можем увидеть не саму дыру, а только ее окрестность.

Черные дыры разрушают все, что приближается к ним. Недавно удалось наблюдать вспышку, которая возникла, когда черная дыра всего за несколько часов разорвала звезду, приблизившуюся к ней под действием гравитационного поля этой дыры и поля соседних звезд. Хотя плохая репутация черных дыр вполне ими заслужена, они иногда приносят пользу – привлекая своим полем вещество даже из далекой окрестности, способствуют образованию звезд.

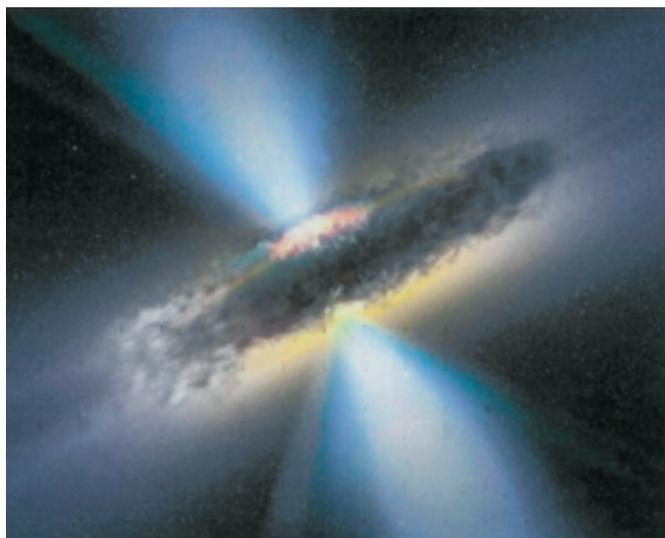


Рис.10. Черная дыра в галактике NGC 4388, окруженная массивным раскаленным до ста миллионов градусов вращающимся газовым облаком в виде тора, который, в свою очередь, окружен тороидальной туманностью. Из полюсов исходит быстро вращающаяся струя вещества

В сильном гравитационном поле вблизи дыры время течет медленно, поэтому длина волны излучения будет тем больше, чем ближе к дыре оно возникает. Если какой-то объект, падая на дыру, станет подавать сигналы, это не поможет нам увидеть, как он достигнет дыры. Интервал между сигналами будет становиться все длиннее, и последних сигналов мы никогда не увидим. Вот почему никакие наблюдения внутренности дыры невозможны. Вещество, приближаясь к дыре, будет разрываться на все более мелкие части, вплоть до элементарных частиц. Внутри дыры почти совершенно пустая, так как все вещество сосредоточено в центре. Граница черной дыры – это поверхность, где тяготение,

создаваемое ее центром, столь велико, что даже свет не может ее пересечь.

Дыра не будет совсем невидима даже в том случае, если на нее вовсе не падает вещество. Чтобы понять, в чем здесь дело, обратимся к некоторым результатам квантовой теории. Гравитационное поле у поверхности дыры очень сильное. Плотность энергии этого поля достаточно велика, чтобы породить пару электрон-позитрон (закон сохранения заряда требует обязательного рождения пары). Пара электрон-позитрон может сама по себе появиться в вакууме на время не больше чем $\Delta t = \hbar / (2mc^2)$. За это время частицы не могут удалиться друг от друга на расстояние больше чем $2 \cdot 10^{-11}$ см. Тем не менее, даже на столь малом расстоянии разница сил тяготения вблизи дыры достаточно велика, чтобы вырвать частицы из вакуума и превратить в реальные частицы.

Энергия, которая необходима для рождения пары, берется из энергии дыры. Возможно, что обе частицы упадут на дыру, и тем самым ее энергия не изменится. Но может случиться, что только одна из частиц будет падать к дыре, а импульс второй будет достаточен, чтобы преодолеть тяготение и покинуть окрестность дыры. Энергия этой частицы отнимет какую-то долю энергии дыры, т.е. дыра будет «испаряться». Количественный расчет показывает, что дыра излучает энергию, как нагретое черное тело. Масса дыры будет расти, пока поблизости есть вещество, которое может быть захвачено дырой. В то же время дыра будет терять энергию, а значит, и массу в виде частиц, рождаемых у поверхности и покидающих окрестность дыры. Расчет показывает, что уменьшение массы дыры происходит исключительно медленно и за время жизни Вселенной только самые мелкие дыры могли уже испариться.

Увеличение гравитационного поля по мере сжатия вещества влияет на состояние вакуума. Это может привести к тому, что при определенных темпах сжатия дыра вовсе не образуется, а возникнет так называемая черная звезда, которая почти не излучает.

Частицы, поглощаемые дырой, обладают целым набором различных свойств, иными словами – содержат большой объем информации. Исчезают ли все следы этих свойств, когда частица поглощается дырой? Проявляются ли опять эти свойства, когда дыра испаряется и исчезает? На эти вопросы пока ответа нет.

Разрезания металлического прямоугольника

М.СКОПЕНКОВ, М.ПРАСОЛОВ, С.ДОРИЧЕНКО

ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ НАГЛЯДНЫ И КРАСИВЫ, но иногда их совсем не просто решить. С давних пор они вдохновляли дизайнеров и архитекторов. Ученые обратили на них внимание, когда обнаружилась их неожиданная связь с физикой и теорией вероятностей. Об одной из таких задач и пойдет речь в этой статье.

Какие прямоугольники можно разрезать на квадраты

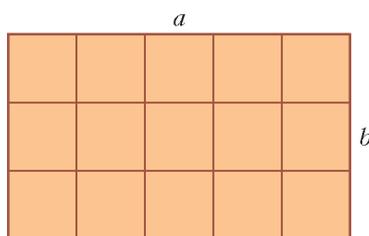


Рис.1. Прямоугольник $a \times b$ разрезается на $a \cdot b$ одинаковых квадратов

Прямоугольник размером $a \times b$, где a и b – целые числа, легко разрезается на $a \cdot b$ одинаковых квадратов (рис.1). Так же легко разрезать на равные квадраты прямоугольник с рациональным отношением сторон.

Естественный вопрос: какие прямоугольники

можно разрезать на квадраты не обязательно одного и того же размера? Оказывается, ответ тот же самый:

Теорема Дена о разрезании прямоугольника. Если прямоугольник можно разрезать на квадраты (не обязательно равные), то отношение длин его сторон рационально.

Эту теорему открыл Макс Ден в 1903 году.

Его доказательство было довольно сложным. Впоследствии появились более простые. Мы приведем одно из них, принадлежащее Р.Л.Бруксу, К.А.Б.Смиту, А.Г.Стоуну и У.Т.Татту. Они придумали его, еще будучи студентами.¹ Это доказательство основано на физической интерпретации, использующей электрические цепи. При этом физические соображения служат отправной точкой, а само доказательство чисто математическое.

Итак, пусть прямоугольник разрезан на квадраты. Чтобы найти отношение его сторон, достаточно найти стороны этих квадратов с точностью до пропорциональности. Покажем на примере, как это можно сделать.

¹ Увлекательный рассказ об этом можно прочитать в главе «Квадрирование квадрата» книги М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М.: Мир, 1999).

Как найти стороны квадратов

На рисунке 2 изображено фото² прямоугольного шкафа с квадратными полками. Представим себе, что мы хотим изготовить такой же шкаф. Для этого нам в



Рис.2. Прямоугольный шкаф с квадратными полками

первую очередь нужно узнать размеры полок. Просто измерить эти величины на фотографии не удастся, так как мы видим шкаф «под углом», а значит, истинные длины искажены.

Для того, чтобы найти эти размеры, занумеруем квадраты (полки), как показано на рисунке 3. Будем считать, что горизонтальная сторона прямоугольника (шкафа) равна 1, а вертикальную сторону (без учета ножек) обозначим через x . Сторону квадрата k обозначим через x_k .

² Фото с сайта <http://www.mynl.com/www/project11.html>

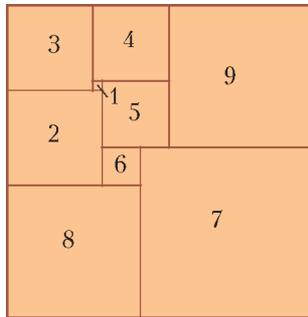


Рис.3. Нумерация квадратов

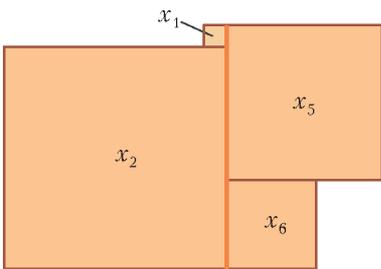


Рис.4. Условие вертикальной стыковки: $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$

разрезу слева, равна сумме сторон квадратов, примыкающих справа. Вертикальная сторона прямоугольника равна сумме сторон примыкающих к ней квадратов.³

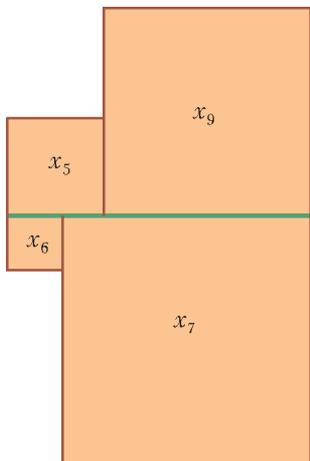


Рис.5. Условие горизонтальной стыковки: $x_5 + x_9 = x_6 + x_7$

К левой стороне прямоугольника примыкают квадраты 2, 3 и 8, откуда $x = x_2 + x_3 + x_8$. К правой стороне квадрата 3 примыкают квадраты 1 и 4: $x_3 = x_1 + x_4$. Аналогично, $x_6 + x_8 = x_7$, $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$, $x_4 + x_5 = x_9$. Равенство для правой стороны прямоугольника мы не записываем, поскольку оно следует из предыдущих (получается сложением всех выписанных равенств). Сформулируем наше наблюдение, (рис. 4):

Условие вертикальной стыковки. Для каждого вертикального разреза сумма сторон квадратов, примыкающих к

Заменяя слово «вертикальный» на «горизонтальный», а слова «слева» и

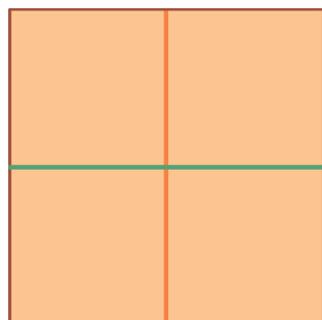


Рис.6. В таком разрезании один горизонтальный и два вертикальных разреза

«справа» – на «сверху» и «снизу», мы получаем условие горизонтальной стыковки, (рис. 5).

³ Для разрезов, у которых в некоторых точках сходится сразу 4 квадрата (как на рисунках 1 или 6), надо уточнить понятие разреза. Покрасим все горизонтальные стороны квадратов, не лежащие на периметре прямоугольника, в зеленый цвет. Они объединятся в несколько зеленых отрезков, которые мы и назовем горизонтальными разрезами. Вертикальные стороны квадратов, не лежащие на периметре, покрасим в оранжевый цвет. Полученные оранжевые отрезки делаются горизонтальными разрезами на части, именно эти части мы и назовем вертикальными разрезами (рис. 6).

Из этого условия в нашем примере со шкафом получим: $1 = x_3 + x_4 + x_9$, $x_4 = x_1 + x_5$, $x_1 + x_3 = x_2$, $x_5 + x_9 = x_6 + x_7$, $x_2 + x_6 = x_8$. Условие для нижней стороны прямоугольника мы не записываем, поскольку оно следует из остальных.

Итак, осталось решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x &= x_2 + x_3 + x_8, & x_3 &= x_1 + x_4, & x_6 + x_8 &= x_7, \\ x_1 + x_2 &= x_5 + x_6, & x_4 + x_5 &= x_9, \\ x_3 + x_4 + x_9 &= 1, & x_4 &= x_1 + x_5, & x_1 + x_3 &= x_2, \\ x_5 + x_9 &= x_6 + x_7, & x_2 + x_6 &= x_8. \end{aligned}$$

Такие уравнения называются *линейными*.

Как решить систему линейных уравнений⁴

Будем последовательно выражать неизвестные. В первом уравнении неизвестная x выражена через другие неизвестные. Больше x нигде не участвует, поэтому переходим ко второму уравнению. В нем неизвестная x_3 выражена через x_1 и x_4 . Подставим это выражение в другие уравнения системы, содержащие неизвестную x_3 – в первое, шестое и восьмое. Получим систему

$$\begin{aligned} x &= x_2 + x_1 + x_4 + x_8, & x_3 &= x_1 + x_4, & x_6 + x_8 &= x_7, \\ x_1 + x_2 &= x_5 + x_6, & x_4 + x_5 &= x_9, \\ x_1 + 2x_4 + x_9 &= 1, & x_4 &= x_1 + x_5, & 2x_1 + x_4 &= x_2, \\ x_5 + x_9 &= x_6 + x_7, & x_2 + x_6 &= x_8. \end{aligned}$$

Она равносильна исходной. Но теперь неизвестная x_3 участвует только во втором уравнении. Перейдем к третьему уравнению. Подставляя выражение $x_7 = x_6 + x_8$ в девятое уравнение, получим систему, содержащую x_7 только в третьем уравнении:

$$\begin{aligned} x &= x_2 + x_1 + x_4 + x_8, & x_3 &= x_1 + x_4, & x_6 + x_8 &= x_7, \\ x_1 + x_2 &= x_5 + x_6, & x_4 + x_5 &= x_9, \\ x_1 + 2x_4 + x_9 &= 1, & x_4 &= x_1 + x_5, & 2x_1 + x_4 &= x_2, \\ x_5 + x_9 &= 2x_6 + x_8, & x_2 + x_6 &= x_8. \end{aligned}$$

Будем продолжать таким же образом дальше. В итоге мы получим систему «уравнений»

$$\begin{aligned} x &= 33/32, & x_3 &= 9/32, & x_7 &= 1/2, & x_1 &= 1/32, \\ x_4 &= 1/4, & x_9 &= 15/32, & x_5 &= 7/32, & x_2 &= 5/16, \\ x_8 &= 7/16, & x_6 &= 1/8. \end{aligned}$$

Решение исходной системы найдено! Значения неизвестных x_1, \dots, x_9 – это и есть стороны квадратов. В нашем примере прямоугольник оказался разрезан на попарно различные квадраты.

Задача 1. Докажите, что плоскость можно замостить попарно различными квадратами, длины сторон которых: а) рациональные; б) целые числа.

А можно ли *квадрат* разрезать на попарно различные квадраты? Задача эта появилась в начале прошлого века и оказалась очень сложной. Решили ее только

⁴ Подробно об этом рассказывается в статье В.Гутенмахера «Системы линейных уравнений» в «Кванте» №1 за 1984 год.

спустя несколько десятилетий уже известные нам четыре студента и независимо от них Р.Шпраг. Но если Р.Шпраг использовал сложный перебор, то нашим студентам найти решение помогла физическая интерпретация. Потом было найдено много разных примеров, пример с наименьшим количеством квадратов изображен на рисунке 7.



Рис.7. Квадратное одеяло, сшитое из квадратных лоскутков

Задача 2*. Можно ли куб разрезать на несколько попарно-различных кубиков?

Когда наш метод работает

Итак, для шкафа мы нашли все интересующие нас размеры. Но будет ли так и для любого другого разрезания? Ясно, что если решение системы, построенной по условиям стыковки, единственно, то мы найдем его нашим методом. И, конечно же, оно будет рациональным: ведь коэффициенты системы рациональны, а мы, выражая неизвестные, используем только сложение, вычитание, умножение и деление. Это простое наблюдение мы назовем так:

Теорема о решении системы. Пусть система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет единственное решение. Тогда это решение состоит из рациональных чисел.

Бывают системы линейных уравнений, у которых решение не единственно. Например, система

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 = 1$$

имеет бесконечно много решений: в качестве x_1 можно взять любое число t , в качестве x_2 число $-t$, а в качестве x_3 число $1 - t$. У нее есть и иррациональные решения (когда t иррационально).

Совершенно не очевидно, что условий стыковки достаточно, чтобы найти стороны квадратов, т.е. что

система, построенная по реальному разрезанию, имеет единственное решение. Оказывается, что это всегда так: наш метод позволяет *однозначно* восстановить все размеры по фотографии разрезания (если мы считаем горизонтальную сторону прямоугольника равной 1). Мы докажем это с помощью физической интерпретации. А теорема Дена о разрезании прямоугольника отсюда сразу следует по теореме о решении системы.

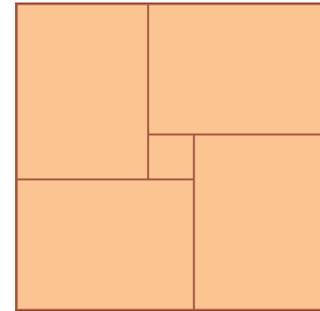


Рис.8. План квартиры

Задача 3. Архитектор нарисовал план квартиры. На плане (рис. 8) показано, как должны примыкать комнаты друг к другу, но их размеры искажены. Можно ли сделать все комнаты квадратными?

Физическая интерпретация

Оказывается, каждому разрезанию прямоугольника на квадраты можно сопоставить электрическую цепь. Если мы найдем токи в этой электрической цепи, то мы найдем и стороны квадратов. Но обо всем по порядку.

Мы будем рассматривать *математическую модель* электрической цепи.⁵ Вместо физических законов и опытных фактов у нас будут определения, аксиомы, теоремы.

С математической точки зрения *электрическая цепь* – это связный плоский граф, каждому ребру которого сопоставлено некоторое положительное число, причем концы одного из ребер отмечены знаками «+» и «-». Ребро с отмеченными концами называется *батарежкой*, остальные – *резисторами*. Число, сопоставленное батарейке, называется *напряжением* батарейки, а числа, сопоставленные резисторам, – их *сопротивлениями*. Вершины графа называются *узлами*, от-

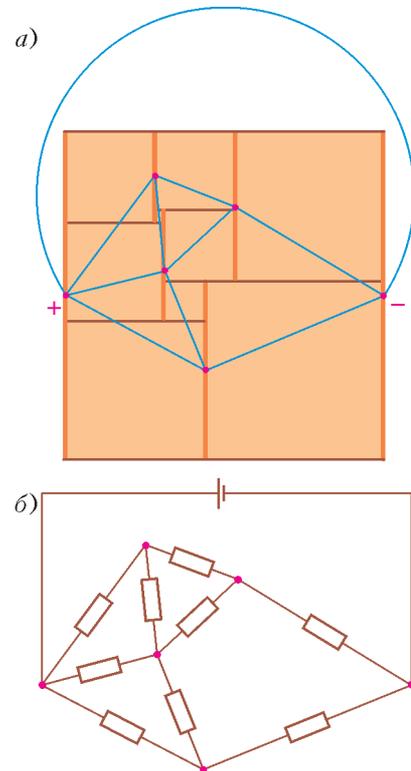


Рис.9. а) Построение электрической цепи по разрезанию. б) Общепринятое изображение электрической цепи

⁵ Желаящим подробно разобраться в физике происходящего рекомендуем, например, статью «Правила Кирхгофа» в «Кванте» №1 за 1985 год.

меченные узлы батарейки – *положительной и отрицательной клеммами*.

По разрезанию цепь строится так (рис. 9,а). На каждой вертикальной линии разреза отметим по точке – это будут узлы электрической цепи. На вертикальных сторонах прямоугольника выберем по клемме, отметим их знаками «+» (на левой стороне) и «-» (на правой стороне) и соединим с батарейкой.

Каждый квадрат ограничен слева и справа двумя вертикальными разрезами. В электрической цепи его изображением служит резистор, соединяющий два узла на этих разрезах (узлы могут оказаться на продолжениях сторон квадрата). Сопротивление каждого резистора положим равным 1.⁶ Напряжение батарейки также положим равным 1. Нужная нам электрическая цепь построена (рис. 9, б).

Как найти токи в электрической цепи

Теперь объясним, что такое *токи* в электрической цепи и как их можно найти.

Занумеруем резисторы, как показано на рисунке 10 (т.е. так же, как соответствующие квадраты). Нарисуем на каждом резисторе стрелку слева направо, а на батарейке – справа налево, т.е. от отрицательной клеммы к положительной.⁷ Электрическая цепь делит плоскость на части. Обходя границу любой части по часовой стрелке, получим замкнутую цепочку ребер, называемую *контуром*.⁸

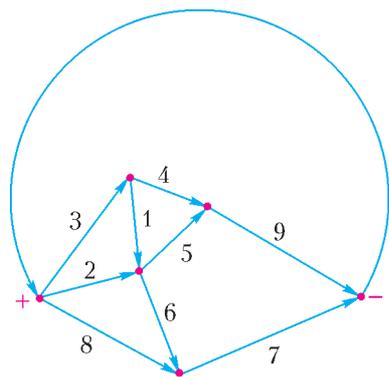


Рис.10. Нумерация резисторов и выбор направлений на резисторах и батарейке

Сила тока через k -й резистор – это просто некоторое действительное число I_k , сопоставленное резистору. Сила тока через батарейку – это некоторое действительное число I . Напряжение на резисторе – это произведение силы тока на сопротивление резистора. (А для батарейки напряжение вообще от тока не зависит. Такая батарейка в физике называется *идеальной*.) Силы тока определяются следующими аксиомами (правилами), проиллюстрированными на рисунках 12, 13, 14.

⁶ Мы раз и навсегда фиксируем единицы измерения: сопротивления будем измерять в килоомах, напряжения – в вольтах, токи – в миллиамперах. В дальнейшем единицы измерения не указываются.

⁷ Мы нарисовали предполагаемые направления тока. Читателя может смутить, что в одном из ребер ток направлен от «минуса» к «плюсу». Но это действительно так: ток в резисторах идет от «плюса» к «минусу», а вот в батарейке – наоборот.

⁸ Для простоты будем считать, что контур не проходит ни через какое ребро дважды. Это не всегда так (рис. 11). Однако в дальнейшем мы увидим, что это так для любой цепи, построенной по разрезанию прямоугольника.

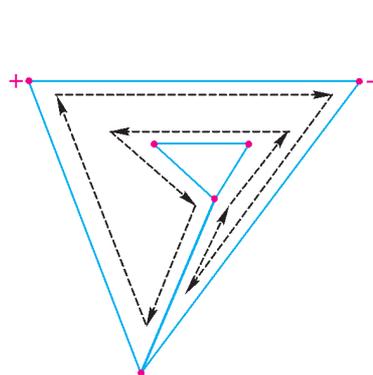


Рис.11. Контур, проходящий по ребру дважды

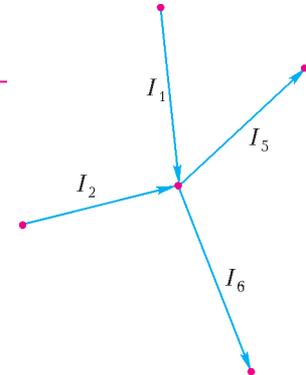


Рис.12. Первое правило Кирхгофа: $I_1 + I_2 = I_5 + I_6$

Первое правило Кирхгофа. В каждом узле сумма входящих токов равна сумме выходящих.

Для нашего примера (см. рис.10) получаем такие уравнения:

$$I = I_2 + I_3 + I_8,$$

$$I_3 = I_1 + I_4, \quad I_6 + I_8 = I_7,$$

$$I_1 + I_2 = I_5 + I_6,$$

$$I_4 + I_5 = I_9.$$

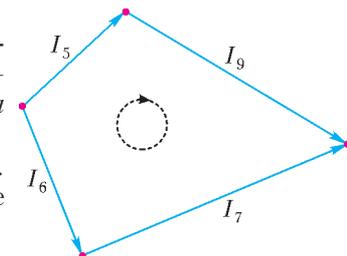


Рис.13. Второе правило Кирхгофа для контура без батарейки: $I_5 + I_9 - I_6 - I_7 = 0$ (учтено, что все сопротивления в нашем примере равны 1)

(Мы не записываем уравнение для правой клеммы, поскольку оно непосредственно следует из остальных.)

Второе правило Кирхгофа. Для любого контура сумма напряжений на резисторах (с соответствующими знаками) равна напряжению батарейки (с соответствующим знаком), если контур содержит батарейку, а иначе – равно нулю. Напряжение на резисторе берется со знаком «+», если направление стрелки на резисторе совпадает с направлением обхода контура, а иначе – со знаком «-». Так же определяется знак для батарейки.

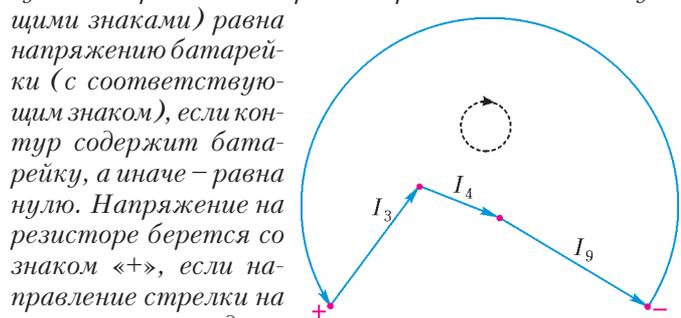


Рис.14. Второе правило Кирхгофа для контура с батарейкой: $-I_3 - I_4 - I_9 = -1$ (учтено, что напряжение батарейки в нашем примере равно 1)

Поскольку у нас напряжение батарейки равно 1 и все сопротивления равны 1, получаем уравнения

$$-I_3 - I_4 - I_9 = -1, \quad I_4 - I_1 - I_5 = 0,$$

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0, \quad I_5 + I_9 - I_6 - I_7 = 0, \quad I_2 + I_6 - I_8 = 0.$$

(Мы не записываем уравнение для контура вокруг всей цепи, поскольку оно непосредственно следует из остальных.) Решая полученную систему уравнений, находим все силы токов:

$$I = 33/32, \quad I_3 = 9/32, \quad I_7 = 1/2, \quad I_1 = 1/32, \quad I_4 = 1/4, \\ I_9 = 15/32, \quad I_5 = 7/32, \quad I_2 = 5/16, \quad I_8 = 7/16, \quad I_6 = 1/8.$$

У нас есть аксиомы (правила Кирхгофа), которые мы заимствовали из физики, а все остальные утверждения об электрических цепях мы выводим из них чисто математически.

Задача 4. Выведите из второго правила Кирхгофа более общее правило, которое получается, если заменить в формулировке контур на любую замкнутую цепочку ребер (не проходящую ни через какую вершину дважды).

Правила Кирхгофа совпадают с условиями стыковки

Удивительным образом правила Кирхгофа дают нам ту же самую систему уравнений на силы токов, что и условия стыковки на длины сторон квадратов! Докажем это.

Рассмотрим первое правило Кирхгофа. Зафиксируем вертикальный разрез и соответствующий ему узел.

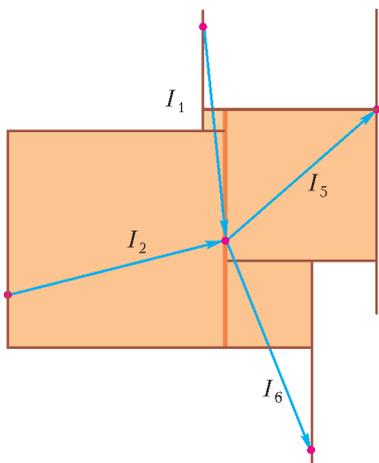


Рис.15. Первое правило Кирхгофа и условие вертикальной стыковки

Входящие в узел токи соответствуют сторонам квадратов, примыкающим к разрезу слева, а выходящие из узла – сторонам квадратов справа (рис. 15). Значит, первое правило Кирхгофа в этом узле для токов совпадает с правилом вертикальной стыковки.

Рассмотрим второе правило Кирхгофа. Возьмем любой горизонтальный разрез.

Ясно, что резисторы, соответствующие примыкающим к нему квадратам, образуют контур (рис. 16). Квадраты сверху образуют верхнюю часть контура, а квадраты снизу – нижнюю. Поскольку все сопротивления единичны, напряжение на каждом резисторе равно силе тока на нем. Значит, правило горизонтальной стыковки для нашего разреза совпадает со вторым правилом Кирхгофа.

Наоборот, возьмем любой контур. Его самый левый узел соответствует некоторому вертикальному разрезу. К разрезу примыкают справа два квадрата, соответствующие двум выходящим из узла резисторам контура. Рассмотрим горизонтальный разрез, к которому примыкают эти квадраты. Снова, все квадраты, примыкающие к разрезу сверху, образуют верхнюю часть нашего контура, а все примыкающие снизу – нижнюю. Значит, второе правило

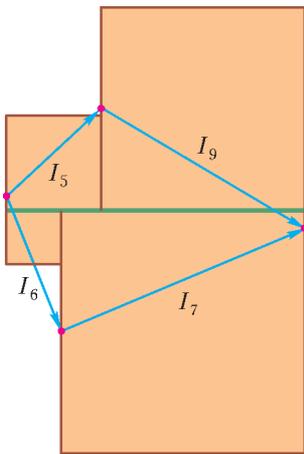


Рис.16. Второе правило Кирхгофа и условие горизонтальной стыковки

Кирхгофа для нашего контура совпадает с правилом горизонтальной стыковки.

Итак, правила Кирхгофа совпадают с условиями стыковки. Значит ли это, что токи совпадают с длинами сторон квадратов? Да, но только если наша система уравнений имеет *лишь одно* решение. В этом случае, изготовив по разрезанию электрическую цепь, длины сторон квадратов можно было бы найти... просто измерив токи!

Единственность распределения токов в электрической цепи

Теорема единственности. Пусть сопротивления всех резисторов цепи положительны. Тогда система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа, в которой силы тока – неизвестные, а напряжение батарейки и сопротивления резисторов известны, имеет не более одного решения.

На «физическом уровне строгости» эта теорема почти очевидна. Пусть решений два. Вычтем одно из другого. Тогда напряжение батарейки станет нулевым, а ток не везде будет равен нулю, чего не бывает.

С точки зрения математики это объяснение нельзя считать доказательством. Нельзя исключить возможность, что наша система уравнений имеет какие-то «посторонние» решения, которых не бывает в «реальной» электрической цепи. Да и в нашем рассуждении мы нигде не использовали, что сопротивления всех резисторов строго положительны. А без этого предположения теорема неверна: в кольце из сверхпроводника (т.е. резистора с нулевым сопротивлением) может течь ненулевой ток при нулевом напряжении!

Вот как можно математически строго доказать теорему единственности:

Доказательство теоремы единственности. Пусть есть два решения. Первое будем обозначать I_1, I_2, \dots , второе J_1, J_2, \dots . Наша цель – доказать, что их разность $I_1 - J_1, I_2 - J_2, \dots$ нулевая.

Рассмотрим любое уравнение нашей системы. Пусть, например, оно записано для узла, изображенного на рисунке 12. Подставив в него первое решение, получим: $I_1 + I_2 = I_5 + I_6$. Подставив второе, получим $J_1 + J_2 = J_5 + J_6$. Вычтем одно равенство из другого: $(I_1 - J_1) + (I_2 - J_2) = (I_5 - J_5) + (I_6 - J_6)$. Получается, что разность наших решений удовлетворяет тому же самому уравнению. Так будет и для уравнения, записанного для любого другого узла или любого контура, не содержащего батарейку.

Пусть теперь уравнение записано для контура, содержащего батарейку, например для контура на рисунке 14. Подставляя в это уравнение наши решения, получим равенства $I_3 + I_4 + I_9 = 1$ и $J_3 + J_4 + J_9 = 1$. Вычтем одно равенство из другого: $(I_3 - J_3) + (I_4 - J_4) + (I_9 - J_9) = 0$. Получается, что разность наших решений удовлетворяет тому же самому уравнению, только с нулевой правой частью. Но в правой части исходного уравнения стояло напряжение батарейки. Получаем, что разность наших решений подчиняется правилам

Кирхгофа для той же цепи, только с нулевым напряжением батарейки.

Теорема единственности свелась к такому утверждению:

Принцип техники безопасности. Если напряжение батарейки равно нулю, то и все силы тока в электрической цепи нулевые.

Доказательство. Пусть в цепи есть ненулевые токи. Если сила тока на каких-то ребрах отрицательна, то поменяем на каждом из них направление стрелки, знак силы тока и знак напряжения. Ясно, что правила Кирхгофа по-прежнему будут выполняться, а все силы тока станут неотрицательными. Начнем движение с ребра, на котором сила тока ненулевая, и будем двигаться в направлении стрелок. Из первого правила Кирхгофа следует, что мы можем неограниченно продолжать движение (ведь если у вершины есть положительный входящий ток, то есть и выходящий). Рано или поздно мы впервые вернемся в вершину, в которой уже побывали. Значит, мы получим замкнутую цепочку ребер, на которых сила тока неотрицательна, причем хотя бы на одном из них она больше нуля. По задаче 4 получаем противоречие со вторым правилом Кирхгофа, потому что напряжение батарейки равно нулю. Принцип техники безопасности, а вместе с ним и теорема единственности доказаны.

Задача 5*. Выведите из правил Кирхгофа, что если напряжение батарейки положительно, то сила тока через нее: а) не равна нулю; б) положительна.

Задача 6. Напряжение батарейки увеличили в n раз. Докажите, что все силы тока в цепи также увеличились в n раз.

Доказательство теоремы Дена о разрезании прямоугольника

Пусть прямоугольник разрезан на квадраты. Расположим его так, чтобы две его стороны были вертикальными, а две другие – горизонтальными. Будем считать, что длина горизонтальной стороны равна 1. Ясно, что стороны всех квадратов либо вертикальны, либо горизонтальны. Рассмотрим электрическую цепь, соответствующую разрезанию. Система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа для этой цепи, имеет решение – в качестве сил токов можно взять длины сторон квадратов. По теореме единственности других решений у этой системы нет. Значит, по теореме о решении системы оно состоит из рациональных чисел. Поэтому длины сторон всех квадратов, а следовательно, и отношение сторон прямоугольника рациональны. Теорема Дена доказана.

Задача 7. Покажите, что квадрат нельзя разрезать на подобные (но не обязательно равные) прямоугольники с отношением сторон $\sqrt{2}$.

Десерт

Мы ответили на все вопросы, поставленные в статье, но ее название осталось загадкой. Объяснение названия мы оставили на десерт: это будет наглядная картинка электрической цепи, построенной по разрезанию. Раньше физическая интерпретация выглядела

как некоторый трюк, теперь наша цель – показать, как до нее можно додуматься.

Пусть большой прямоугольник разрезан на меньшие (не обязательно квадраты), и требуется выразить отношение сторон большого прямоугольника через отношение сторон меньших. Расположим большой прямоугольник так, чтобы две его стороны были вертикальными, а две другие – горизонтальными. Отношением сторон прямоугольника договоримся считать отношение длины его горизонтальной стороны к длине вертикальной.

Пример 1. Прямоугольник с отношением сторон R разделен вертикальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис.17,а). Покажем, что $R = R_1 + R_2$. Действительно, пусть вертикальная сторона большого прямоугольника равна x . Тогда горизонтальные стороны меньших прямоугольников равны R_1x и R_2x . Значит, $R = (R_1x + R_2x)/x = R_1 + R_2$.

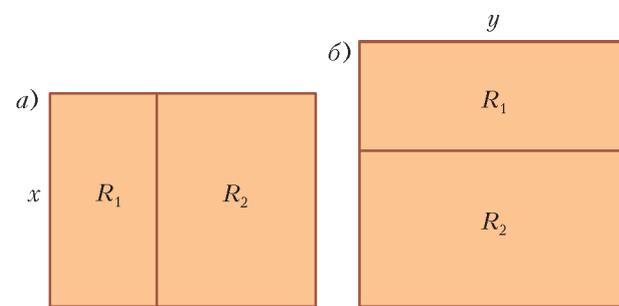


Рис.17. Разрезания прямоугольника на 2 прямоугольника

Пример 2. Прямоугольник с отношением сторон R разделен горизонтальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис.17,б). Покажем, что $R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$. Действительно, пусть горизонтальная сторона большого прямоугольника равна y . Тогда вертикальные стороны меньших прямоугольников равны y/R_1 и y/R_2 . Значит,

$$R = \frac{y}{y/R_1 + y/R_2} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Да это же формулы сопротивления цепей из последовательно и параллельно соединенных резисторов! Объяснение очень простое (рис. 18, 19).

Представим себе, что у нас есть прямоугольная металлическая пластинка. Соединим ее вертикальные стороны с клеммами батарейки (точнее, к каждой из вертикальных сторон по всей длине приложим проводник, соединенный с соответствующей клеммой). Тогда через пластинку пойдет ток в горизонтальном направлении. Пластинка играет роль резистора. Как известно из физики, ее сопротивление пропорционально отношению длины к площади вертикального поперечного сечения. Иными словами, сопротивление пластинки пропорционально отношению ее сторон. Для простоты будем считать коэффициент пропорциональности равным 1.

Для примера 1 приставим друг к другу две прямоугольные пластинки одинаковыми вертикальными сто-

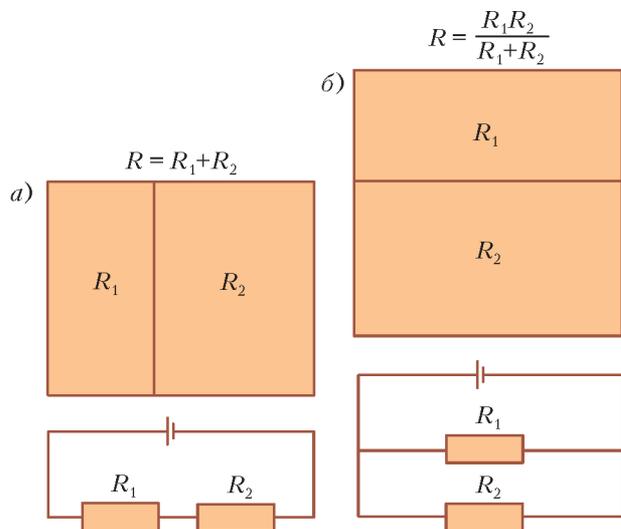


Рис.18. Формулы для отношения сторон такие же, как и для сопротивления

ронами. Оставшиеся вертикальные стороны соединим с полюсами батарейки. Получим цепь из двух последовательно соединенных резисторов (рис.19,а). Если отношения сторон этих пластинок R_1 и R_2 , то их сопротивления – тоже R_1 и R_2 . Сопротивление большой пластинки, составленной из двух, равно $R_1 + R_2$ как сопротивление двух последовательно соединенных резисторов. Вот «физическое» объяснение того, что отношение сторон большой пластинки равно $R_1 + R_2$.

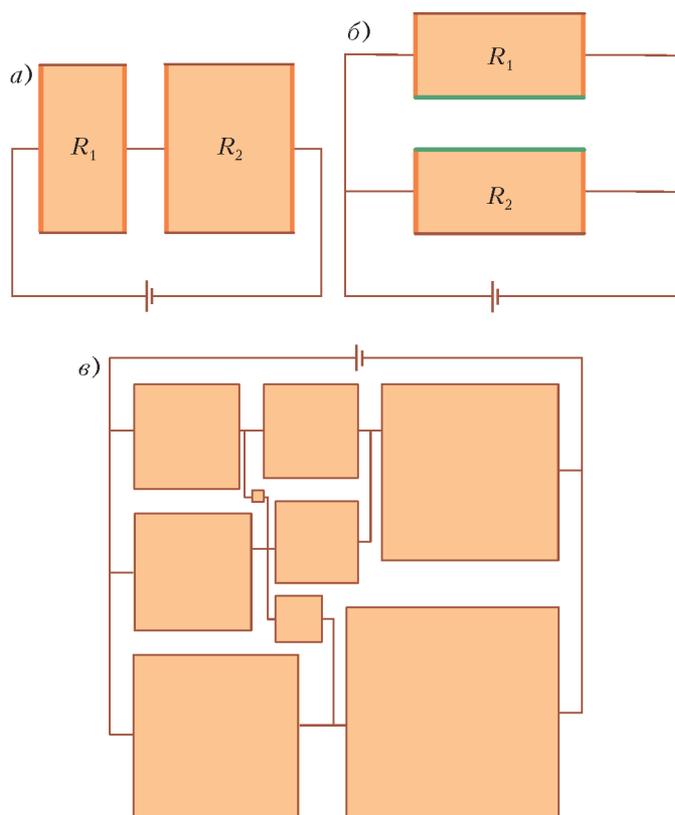


Рис.19. Электрические цепи из металлических пластинок

Перейдем к примеру 2. Приставим две пластинки друг к другу одинаковыми горизонтальными сторонами, а вертикальные стороны соединим с полюсами батарейки (рис.19,б). Поскольку ток течет в горизонтальном направлении, то через линию стыковки ток не идет. Изолируем пластинки друг от друга: ток и сопротивление цепи не изменятся. Мы получим пару параллельно соединенных резисторов, значит, отношение сторон большого прямоугольника находится по формуле $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Это же построение можно применить для любого разрезания прямоугольника на прямоугольники, скажем для изображенного на рисунке 3. Представим себе большую прямоугольную пластинку, разбитую на меньшие. Вертикальные стороны большой пластинки соединим с полюсами батарейки. Вдоль горизонтальных линий разреза изолируем меньшие пластинки друг от друга, а вдоль вертикальных линий разреза пусть они стыкуются. Мы получим электрическую цепь, сопротивление которой равно отношению сторон большой пластинки (рис.19,в). На самом деле это та же самая электрическая цепь, которую мы построили раньше.

Таким образом, чтобы найти отношение сторон прямоугольника, достаточно измерить сопротивление электрической цепи, построенной по разрезанию! Об этом мы подробно расскажем в одном из следующих номеров журнала.

Задача 8. Прямоугольник разделен на пять прямоугольников с отношениями сторон $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $R_4 = R_5 = 3$ так, как показано на рисунке 20. Найдите отношение сторон большого прямоугольника.

Задача 9.** На плоскости дана электрическая цепь из резисторов сопротивлением 1 и батарейки напряжением 1. Предположим, все силы токов в цепи ненулевые, а все контуры – треугольные⁹. Попробуйте доказать, что тогда эта цепь получается из некоторого разрезания прямоугольника на квадраты.

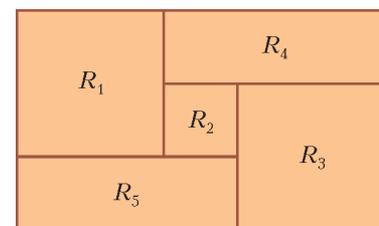


Рис. 20. Разрезание прямоугольника на 5 прямоугольников

Авторы благодарны Евгению Выродову, Сергею Маркелову, Евгению Могилевскому, Владимиру Протасову, Александру Прохорову, Святославу Фельдшеру и Борису Френкину за ценные замечания.

М. Скопенков благодарен за помощь Институту проблем передачи информации РАН и Университету науки и техники короля Абдуллы (Саудовская Аравия).

⁹ На самом деле, достаточно предположения, что в каждом контуре потенциалы вершин попарно различны.

Склейки многоугольников

Г. ШАБАТ, А. СГИБНЕВ

ПРЕДСТАВЬТЕ СЕБЕ ЧАШКУ, ВЫЛЕПЛЕННУЮ из пластилина. Эту чашку можно помять и вылепить из нее бублик (рис. 1). Поэтому с точки зрения геометрии непрерывных преобразований, когда

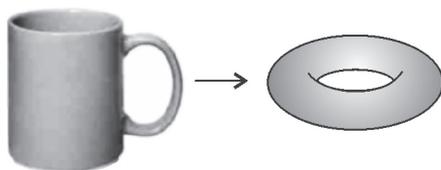


Рис. 1. Чашка и бублик

можно изменять расстояния, но без разрывов, оказывается, что эти объекты одинаковы. Это далеко от строго математического определения, но с общечеловеческой точки зрения понятно. Мы будем пользоваться топологическими терминами так, как будто они строго определены.

Так вот, в статье речь пойдет о фигурах и поверхностях, которые можно мять и деформировать как угодно (только без разрывов). На рисунках 2–4 приведены

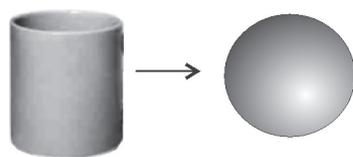


Рис. 2. Стакан и сфера

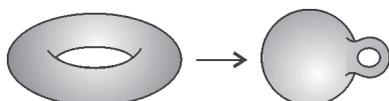


Рис. 3. Тор (бублик) и сфера с ручкой

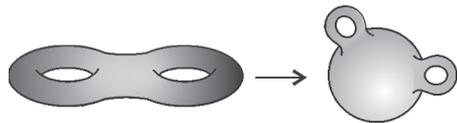


Рис. 4. Крендель и сфера с двумя ручками

изображения и названия некоторых других пар предметов, которые топологически эквивалентны, т.е. переводятся один в другой посредством непрерывных преобразований. В разных языках приняты термины «дырка» или «ручка». Мы будем пользоваться вторым из них.

Экскурс в историю

Давайте передвинемся в прошлое на несколько тысяч лет и подумаем: что знали древние люди о той поверхности, по которой они ходят? Они считали,

что Земля плоская. Какие у них были основания так считать? Мы ходим и передвигаемся на поездах и самолетах по участкам Земли. Если передвигаться только по Северному полушарию, то с топологической точки зрения оно не отличается от плоскости. И лишь рассмотрев Землю целиком (мысленно или из космоса), мы видим, что топология ее поверхности другая – если пренебречь мелкими деталями вроде пещер с двумя выходами. В древности у наших предков не было возможности объехать всю Землю. Поэтому из того, что доступный наблюдению кусок поверхности Земли плоский, делался вывод, что и вся поверхность Земли плоская.

Следы этой идеи остались в науке до сих пор. Давайте задумаемся в этимологию слова «геометрия». Это значит «измерение земли». А ведь в геометрии изучают бесконечную *плоскость*! Между тем, реальной геометрией поверхности Земли должна бы быть геометрия *сферическая* (она напоминает плоскую, но в определенных отношениях сложнее). А мы в школьном курсе имеем дело с бесконечной во все стороны плоскостью – абстракцией, за которой нет никаких физических подтверждений.

Перейдем от размерности 2 к размерности 3. Тут у нас ситуация с пониманием внешнего мира как раз такая же, как у наших далеких предков. Нам с нашими космическими кораблями доступна значительная часть Солнечной системы, мы немножко можем выйти за ее пределы, а самым мощным телескопам доступен еще больший кусок Вселенной. Но ничего похожего на возможность составить полный атлас Вселенной (аналогичный современным географическим атласам) у современной науки и техники нет и в помине. Некоторые из этого делают скороспелый вывод, что Вселенная лежит в трехмерном пространстве. Но никаких оснований для этого нет.

Как наши предки убедились, что поверхность Земли замкнута? Они совершили кругосветное путешествие. Магеллан плыл все время вперед, но вернулся на то же место, с которого стартовал. Теперь представьте себе, что вы сели на космический корабль и долго летели вперед... Может оказаться так, что вы тоже прилетите на то же место, с которого вылетели. Это будет означать, что наше пространство замкнуто.

Правильно будет сказать, что мы находимся не в трехмерном пространстве, а в куске *какого-то* трехмерного объекта (математики называют его *трехмерным многообразием*), и как оно устроено – мы сейчас не знаем (может быть, это и просто трехмерное пространство). Математика не приходит от этого в расте-

рянность, а задает вопрос: а как эта топология Вселенной *может быть* устроена? Иными словами какова классификация трехмерных многообразий?

Классификация двумерных поверхностей

На аналогичный вопрос для двумерных поверхностей наука дала полный ответ. Чтобы точно сформулировать соответствующую теорему, введем еще несколько понятий.

1. *Поверхность* – это то, что *локально* устроено как плоскость. Например, из поверхности глобуса можно вырезать маленький кусочек вокруг Москвы, топологически не отличимый от круга, и развернуть его на плоскость. Такой кусочек математики называют *картой*. Говорят, что поверхность Земли может быть покрыта картами, т.е. можно составить *атлас*.

2. *Компактность* поверхности – это возможность покрыть поверхность конечным количеством карт. Проверьте, что поверхности на рис. 1–4 – компактные. А на рисунке 5 приведен пример некомпактной поверхности.

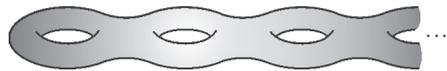


Рис. 5. Некомпактная поверхность

3. Нам потребуется еще одно понятие – *ориентируемость* поверхности. Все слышали про лист Мёбиуса – он получается, если склеить две противоположные стороны квадрата «крест-накрест», так, как показано на рисунке 6,а. (Математики говорят про склейки

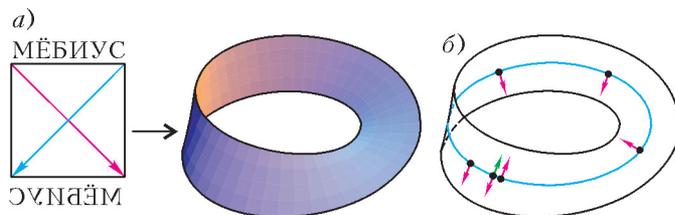


Рис. 6. Лист Мёбиуса

квадрата, но на практике удобнее склеивать вытянутые прямоугольники.) Так вот, поверхность называют ориентируемой, если из нее нельзя вырезать лист Мёбиуса, и неориентируемой, если можно.¹

¹ *Равносильные термины – двусторонние и односторонние поверхности. Смысл термина «ориентируемая» такой. Поместим на лист Мёбиуса два равных вектора, перпендикулярных краю листа (рис. 6,б; зеленый и красный векторы). Затем будем двигать один из векторов по листу (сохраняя перпендикулярность к краю) до тех пор, пока он обойдет весь лист и вернется ко второму. Теперь они направлены противоположно! Таким образом, ориентация на листе Мёбиуса не сохраняется.*

Проведем подобный мысленный эксперимент для нашего трехмерного пространства. Чтобы понять, что пространство замкнуто, надо совершить кругосветное путешествие. Представьте, что вы сели на космический корабль, долго летели вперед и прилетели на то же место. Теоретически может случиться так, что сердце у вас окажется справа, а не слева. (Вы встречаете такое существо каждое утро, когда смотрите в зеркало. Чтобы излечить эту беду, надо еще разок слетать в кругосветное путешествие.) Это будет означать, что наша Вселенная является неориентируемым многообразием.

Упражнение 1. Что получится, если склеить противоположные стороны квадрата «соответственно» (т.е. если на нижней стороне квадрата написать тоже МЁБИУС)?

Теперь мы можем сформулировать утверждение, которое дает полную классификацию двумерных компактных ориентируемых поверхностей.

Теорема. *Любая компактная ориентируемая поверхность – это либо сфера, либо тор (сфера с ручкой), либо сфера с двумя ручками, либо сфера с тремя, четырьмя ... ручками.*

(Одно из доказательств см. в [1].)

Определение. Количество ручек называется *родом* поверхности. Будем его обозначать g (от лат. genus – род).

Итак, теорема утверждает, что компактная ориентируемая поверхность полностью определяется своим родом g .

Таким образом, в двумерной топологии достигнута полная ясность. А вот трехмерная топология пока очень далека от таких законченных результатов, она сейчас бурно развивается. (В частности, недавно была доказана знаменитая *гипотеза Пуанкаре* [2].)

Теорема Эйлера

Представьте, что вы живете на планете, на которой небо всегда затянуто облаками и космические путешествия невозможны. Как, находясь на поверхности



Рис. 7. Планета-крендель

планеты, определить род этой поверхности? Сфера это, тор, крендель или что-то еще? Ведь если дырки гораздо больше нас, то непосредственно мы их видеть не можем (рис. 7).

Топология помогает решить эту задачу.

Разобьем поверхность планеты на карты, например многоугольные. Получим атлас (рис. 8). Подсчитаем все вершины атласа. Обозначим их количество V . Участки границ карт называются ребрами, их количество обозна-

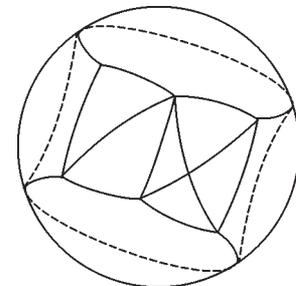


Рис. 8. Атлас

чим P . Каждая карта называется гранью, пусть Γ – количество граней.

Теперь подсчитаем величину, называемую *эйлеровой характеристикой*²:

$$\mathcal{E} = V - P + \Gamma.$$

Приведем два примера. Впишем в сферу куб. Спроектируем ребра куба из центра сферы на ее поверхность. Получится разбиение сферы на четырехугольные карты (рис.9,а). Поступив аналогично с тетраэдром, получим разбиение сферы на треугольные карты (рис.9,б). Подсчитаем эйлеровы характеристики: $\mathcal{E}_{\text{куба}} = 8 - 12 + 6 = 2$, $\mathcal{E}_{\text{тетраэдра}} = 4 - 6 + 4 = 2$.

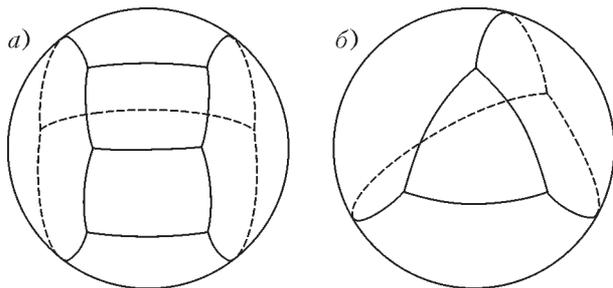


Рис. 9. Примеры разбиений сферы на карты

Характеристики совпали. Оказывается, это не случайно – эйлерова характеристика не зависит от того, какой атлас на планете рассматривается! Попробуем объяснить, почему это так. Главная идея – это *совместное измельчение* атласов.

Что происходит с атласом при измельчении? Рассмотрим произвольную грань, пусть это будет n -угольник.

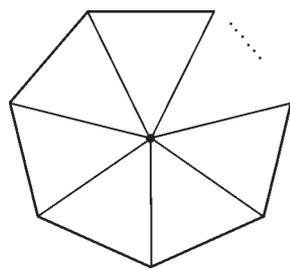


Рис. 10. Измельчение грани

Поместим внутрь него новую вершину и соединим ее ребрами со всеми n вершинами грани (рис. 10). Тогда количество вершин увеличится на 1: $V' = V + 1$. Количество ребер увеличится на n : $P' = P + n$. А что произойдет с количеством граней? Добавится n граней, но исчезнет одна большая, поэтому $\Gamma' = \Gamma + n - 1$. Тем самым, $V' - P' + \Gamma' = V + 1 - (P + n) + \Gamma + n - 1 = V - P + \Gamma$. Поэтому $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$, т.е. от одного такого измельчения эйлерова характеристика не изменится. Немного подумав и внося необходимые уточнения, можно убедиться, что такими ходами любые две разные карты можно измельчить до общей карты. Поскольку на каждом шаге величины эйлеровых характеристик у атласов не изменялись, а в конце оказались равны, то, значит, они были равны изначально.

Мы убедились, что эйлерова характеристика не зависит от атласа (говорят, что она топологически инвариантна). На самом деле она определяется родом поверх-

ности. Следующая знаменитая теорема показывает, каким образом.

Теорема Эйлера. Для атласа с V вершинами, P ребрами и Γ гранями на поверхности рода g справедливо равенство

$$V - P + \Gamma = 2 - 2g.$$

Это – одна из самых замечательных формул в математике, у нее есть много обобщений и приложений (возможно, найдены еще не все). Доказательство см., например, в [3, 4, 5] (с этими книгами полезно познакомиться и вне связи с теоремой Эйлера).

Вернемся к нашей задаче о планете с облаками. После разбиения поверхности планеты на карты и подсчета чисел V, P, Γ возможны следующие ситуации:

$$V - P + \Gamma = 2 \Rightarrow g = 0, \text{ планета – сфера};$$

$$V - P + \Gamma = 0 \Rightarrow g = 1, \text{ планета – тор};$$

$$V - P + \Gamma = -2 \Rightarrow g = 2, \text{ планета – крендель}$$

и так далее.

Как мы видели, одна и та же поверхность может быть описана многими разными атласами. Следующий сюжет показывает, что уже изучение атласов из одной карты содержательно.

Склейки $2n$ -угольников

До сих пор мы разбивали поверхность на многоугольники, а теперь будем, наоборот, склеивать из многоугольников поверхность. Точнее, каждая поверхность будет склеиваться из одного многоугольника.

Задача. Будем рассматривать многоугольники с четным числом сторон, одна из которых выделена. Разобьем стороны на пары и склеим стороны из одной пары. Склеивать будем так, чтобы получалась ориентируемая поверхность. Сколько склеек получится? Какого рода?

Договоримся, что выделенная сторона – нижняя, и будем рисовать ее жирнее остальных. Начнем с четырехугольников ($n = 2$). Будем помечать склеиваемые стороны одинаковыми буквами, а не склеиваемые – разными.

Начнем с нижней стороны, обозначив ее a . Ясно, что ее можно склеить либо с правой, либо с левой, либо с верхней. При этом оставшиеся две стороны однозначно склеиваются друг с другом. Поэтому есть три варианта склейки:

1) См. рис. 11. Получится сфера ($g = 0$). Изобразим на ней вершины и ребра склеенного четырехугольника – получится дерево (рис. 12).

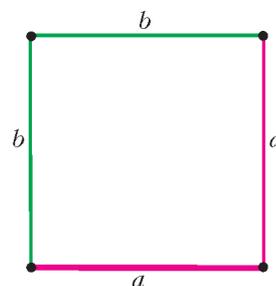


Рис. 11. $abba$

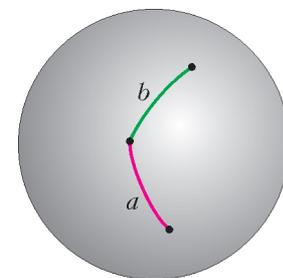
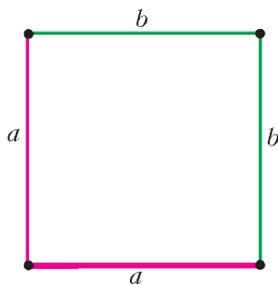
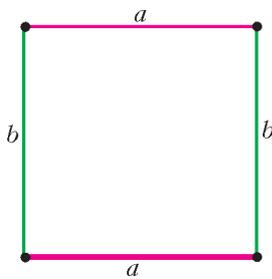


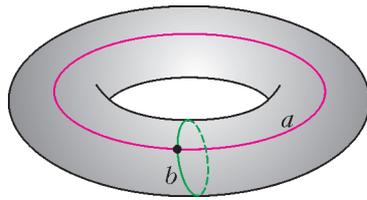
Рис. 12. Сфера с ребрами a и b

² Формулу легко запомнить так: это знакпеременная сумма характеристик нульмерных, одномерных и двумерных объектов.

Рис. 13. $aabb$ Рис. 14. $abab$

2) См. рис. 13. Получится также сфера ($g = 0$).

3) См. рис. 14. Получится тор ($g = 1$). (Чтобы не возникли листы Мёбиуса, одноименные стороны надо склеивать соответственными концами, а не противоположными!) Нарисуем на нем вершины и ребра склеенного многоугольника – получатся два разрезающих тор цикла a и b (рис. 15).

Рис. 15. Тор с ребрами a и b

Очевидно, если нижнюю сторону обозначить буквой b , то мы получим те же самые склейки после переименования a в b и b в a . Поэтому достаточно рассмотреть склейки, в которых выделенной стороне соответствует буква a .

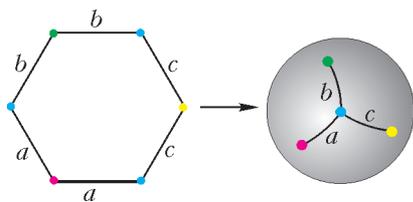
Теперь перейдем к шестиугольникам ($n = 3$).³

Сначала давайте поймем, сколько склеек получится. Их число равно количеству разбиений на пары сторон шестиугольника. Зафиксируем нижнюю сторону шестиугольника a . Парную ей сторону можно выбрать 5 способами. Если зафиксировать какую-либо из оставшихся четырех сторон b , то парную ей можно выбрать 3 способами. Наконец, для одной из двух последних сторон с парная выбирается 1 способом. Итого, $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ вариантов.

Упражнение 2. Докажите, что число склеек для $2n$ -угольника равно

$$(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3 \cdot 1 \equiv (2n-1)!!$$

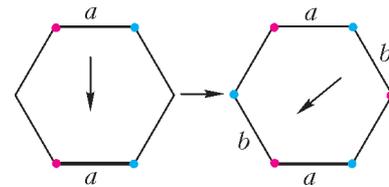
Упражнение 3. Нарисуйте все 15 разбиений сторон шестиугольника на пары.

Рис. 16. $aabbcc$

Р а с с м о т р и м склейку шестиугольника $aabbcc$. Сейчас нам будет удобнее следить не за сторонами, а за вершинами. Обозначим вершины,

которые склеятся, одним и тем же цветом (рис. 16). Получится сфера ($g = 0$).

Теперь рассмотрим склейку шестиугольника $abcabc$. Тут уже топологического воображения может не хватить. Давайте сначала поймем, какие вершины склеятся (рис. 17). Это однозначно определяется из требования ориентируемости поверхности.

Рис. 17. $abcabc$

Итак, у склейки две вершины, три ребра и одна грань: $B = 2$, $P = 3$, $\Gamma = 1$. Какая это будет поверхность? По теореме Эйлера, $\mathcal{E} = 2 - 3 + 1 = 0 = 2 - 2g$. Отсюда $g = 1$,

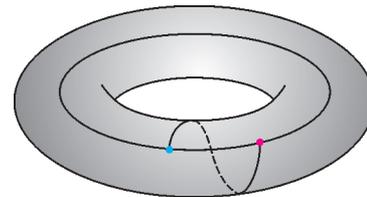


Рис. 18. Скрутка

т.е. склейка является тором. На рисунке 18 показано, как эта склейка выглядит.⁴

А как из такой склейки получить исходный шестиугольник, подробно показано на рисунке 19 (снова одинаковыми цветами отмечены склеиваемые стороны).

Упражнение 4. Определите непосредственно или с помощью теоремы Эйлера род остальных 13 склеек шестиугольника (многие из них повторяются). Нарисуйте склейки с ребрами и вершинами. Ответ для самоконтроля: всего должно получиться 5 сфер и 10 торов.

Перейдем к восьмиугольникам ($n = 4$). Всего их $(2 \cdot 4 - 1)!! = 105$. Конечно, одному сделать их все нелегко, но дружный коллектив школьников вполне может с ними справиться.⁵

Коллективный проект. Нарисуйте все 105 склеек восьмиугольников, определите род каждой склейки.

Ход работы тот же – рисуем восьмиугольник с разбиением сторон на пары, определяем, какая вершина склеивается с какой, находим число вершин B (а с гранями и ребрами все понятно: $\Gamma = 1$, $P = 4$) и по теореме Эйлера находим род поверхности.

Есть и другой подход – подключить к работе компьютер. Для этого введем новое определение.

Определение. Гауссово слово – это слово, в котором все буквы встречаются ровно два раза. При этом вначале идет буква a , первая непарная ей – b , следующая непарная им – c , и так далее.

Договоримся, что у многоугольника выделена нижняя горизонтальная сторона, которой соответствует первая буква. Дальше идем по часовой стрелке. Тогда

³ Для полноты перечня надо не забыть и случай $n = 1$. Ему соответствуют «двуугольники»:



При их склейке получится поверхность рода $g = 0$.

⁴ Те, кому трудно представить происходящее, могут вырезать из полиэтилена большие шестиугольники и склеивать их.

⁵ Например, это сделала группа 7- и 8-классниц на Летней школе интенсивного обучения «Интеллектуал» 2010 года (см. их отчет: <http://www.mcsme.ru/nir/uir/poster.jpg>).

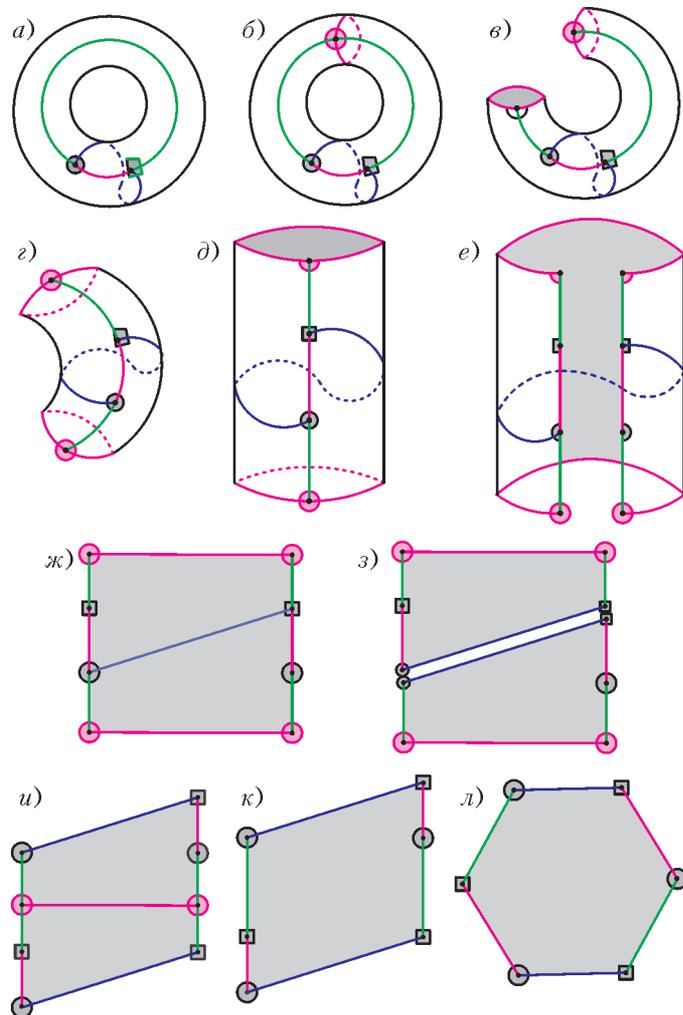


Рис. 19. Получаем шестиугольник из склейки

каждое гауссово слово длины $2n$ определяет одну и только одну склейку $2n$ -угольника.

Упражнение 5. Напишите компьютерную программу, перечисляющую гауссовы слова заданной длины.

Теперь давайте разберемся, как по данному слову вычислять род склейки, не рисуя саму склейку. Каждый $2n$ -угольник дает склейку с одной гранью и n ребрами. Если мы сможем по гауссову слову найти количество вершин, то далее по формуле Эйлера легко определить род поверхности g (т.е. решить задачу, не пользуясь пространственным воображением).

Проект. Напишите компьютерную программу, вычисляющую род склейки, соответствующей заданному гауссову слову. Для этого можно представить вершины многоугольника в виде массива и при каждом склеивании сторон следить, какие вершины склеятся.

Упражнение 6 (для тех, кто знает, что такое граф и дерево). Докажите, что склейка сторон многоугольника дает сферу, если граф, образованный сторонами многоугольника на склеиваемой поверхности, является деревом. Проверьте обратное утверждение.

Упражнение 7. Найдите максимальный род поверхности, которую можно склеить из $2n$ -угольника.

Решение задачи

Теперь введем главную численную характеристику обсуждаемых объектов.

Определение. Количество склеек $2n$ -угольников в ориентируемую поверхность рода g называются *числами Харера-Цагира (Harer-Zagier)* и обозначаются $\epsilon_{g,n}$.

Мы уже находили числа Харера-Цагира $\epsilon_{g,1}$, $\epsilon_{g,2}$, $\epsilon_{g,3}$ (в упражнении 4) и $\epsilon_{g,4}$ (в коллективном проекте). Соберем данные в таблицу, строчки которой отвечают значениям n , а столбцы – значениям g :

$n \backslash g$	0	1	2	3
0	1	–	–	–
1	1	–	–	–
2	2	1	–	–
3	5	10	–	–
4	14	70	21	–
...

(Договоримся считать по определению, что $\epsilon_{0,0} := 1$, т.е. есть одна нульреберная поверхность рода 0.)

Следствие из упражнения 2. Сумма чисел в каждой строке таблицы равна

$$\epsilon_{0,n} + \epsilon_{1,n} + \epsilon_{2,n} + \dots = (2n - 1)!!$$

Рассмотрим числа первого столбца: 1, 1, 2, 5, 14, ... Опытный читатель узнает в них начало последовательности чисел Каталана (см., например, [6, 7]). Давайте докажем, что это действительно они. Выберем из многочисленных определений чисел Каталана то, которое кажется ближе всего к нашей задаче:

Определение. Числом Каталана c_n называется число различных правильных скобочных структур из n пар скобок. (Другие определения см. в [6].)

Вот все правильные скобочные структуры с числом пар скобок 1, 2 и 3:

()
 ()() (())
 ()()() ()()() ((()))

А вот пример неправильной скобочной структуры:

((()))(

Упражнение 8. Постройте взаимно однозначное соответствие между скобочными структурами из трех пар скобок и гауссовыми словами длины 6, порождающими сферу.

Упражнение 9. Сформулируйте и докажете необходимое и достаточное условие того, что гауссово слово длины $2n$ определяет склейку, порождающую сферу. *Указание.* Найдите критерий того, что склейка имеет положительный род.

Упражнение 10. Докажите, что числа $c_n := \epsilon_{0,n}$ – это числа Каталана.

Упражнение 11. Докажите для чисел Каталана рекуррентную формулу

$$c_n = \frac{4n-2}{n+1} c_{n-1}. \quad (**)$$

(Идея наглядного доказательства есть в [6].)

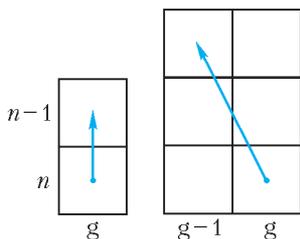


Рис. 20. Ходы

рис. 20):

$$\epsilon_{g,n} = \frac{4n-2}{n+1} \epsilon_{g,n-1} + \frac{(n-1)(2n-1)(2n-3)}{n+1} \epsilon_{g-1,n-2}. \quad (***)$$

В тех случаях, когда числа не определены, они полагаются равными 0. Например, $\epsilon_{g,-1} := 0$. Нетрудно сообразить, что если $g = 0$, то мы получим уже доказанную нами формулу (*) для чисел первого столбца.

Упражнение 12. Проверьте формулу Харера-Цагира в пределах таблицы чисел $\epsilon_{g,n}$ при $n \leq 4$.

Итак, мы умеем выражать число склеек из первого столбца через предыдущее число.

Оказывается, есть рекуррентная формула для всех чисел Харера-Цагира (см. [8]). Она определяет число $\epsilon_{g,n}$ через числа $\epsilon_{g,n-1}$ и $\epsilon_{g-1,n-2}$ (соответственно «ход пешки» и «ход коня»,

Таким образом, современная наука умеет решать задачу о числе склеек $2n$ -угольника. Формула (***) впервые была доказана в 1986 году. Теперь известны несколько ее доказательств, все они используют неэлементарную математику. Например, доказательство [7] использует производящие функции. Но пока неизвестно доказательство, доступное школьникам. Авторам кажется, что его можно получить, продумывая обобщения чисел Каталана из [6]. Возможно, это смогут сделать читатели статьи.

Литература

1. А.Т. Фоменко. Наглядная геометрия и топология. Математические образы реального мира. – М.: Издательство МГУ, ЧеРо, 1998.
2. St.Ornes. What is The Poincare' conjecture? – Seed Magazine, 25 aug. 2006. http://seedmagazine.com/content/article/what_is_the_poincare_conjecture/
3. Р.Курант, Г.Роббинс. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2004. – Гл. 5.
4. И.Лакатос. Доказательства и опровержения. – М.: Наука, 1967.
5. С.Г.Смирнов. Прогулки по замкнутым поверхностям. – М.: МЦНМО, 2003.
6. Г.Б.Шабат. Несколько взглядов на числа Каталана. <http://www.mccme.ru/nir/uir/Catalan.pdf>
7. С.К.Ландо. Лекции о производящих функциях. – М.: МЦНМО, 2004. – Пп. 8.5–8.7.
8. J.Harer, D.Zagier. The Euler Characteristic of the Moduli Space of Curves. – Inv. Math., 1986. – V. 85, pp. 457–485.

НАША ОБЛОЖКА

Как рисовать по небу?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

... Фейерверки появились в Китае почти две тысячи лет тому назад. Однако тогда их использовали в основном для устрашения злых духов. Считается, что источником первого фейерверка была хлопущка из бамбуковой палки – ее клали в огонь, воздух внутри секций бамбука нагревался, расширялся и разносил в щепки эту палку, производя при этом громкий звук и летящие во все стороны искры. Затем фейерверки стали получать, набивая бумажный цилиндр порохом и поджигая его, что сделало фейерверк еще более впечатляющим. Сейчас фейерверки возникают при сжигании различных пороховых пиротехнических изделий и являются неотъемлемой частью всевозможных праздников.

Цветовая палитра фейерверков зависит от химической формулы сгорающего вещества. Красным цветом вспыхивают соли стронция (SrCO_3) и лития (Li_2CO_3 или LiCl), желтым – соли натрия (NaNO_3), зеленым – соли бария (BaCl_2), синим – соли меди (CuCl_2), а белым – пудра титана или алюминия. В том, что разные металлы по-разному расцветивают фейерверки, можно убедиться на уроках химии или физики, попросив преподавателя «посыпать» пламя газовой горелки солями этих металлов. На рисунке 1 видно, какой цвет придают пламени горелки медь (слева), литий (в центре) и натрий (справа).

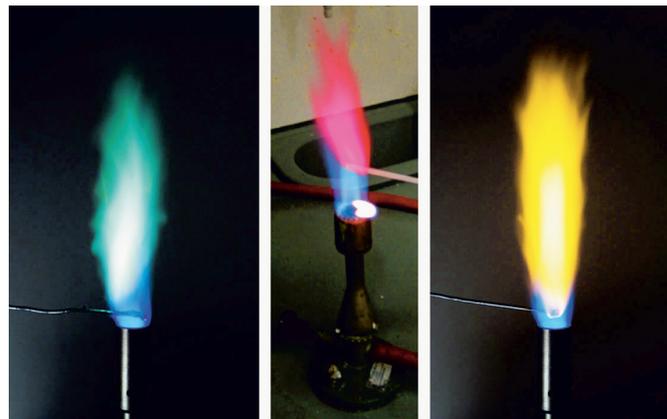


Рис. 1

Когда металлическую пудру нагревают, каждый из ее атомов тоже «нагревается», а их электроны на очень короткое время (около 10 нс) перескакивают на орбиты, более отдаленные от ядра и поэтому соответствующие большей энергии. Возвращаясь на свою обычную орбиту, электрон излучает свет, частота и цвет которого зависят от устройства атома данного металла, точнее – от разности энергий на возбужденной орбите и на основной. При уменьшении этой

(Продолжение см. на с. 42)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3-2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2221» или «Ф2228». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvantjournal.ru и phys@kvantjournal.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача M2224 предлагалась на VII Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, задача M2228 – на международной олимпиаде *Romanian Master of Mathematics*.

Задачи M2221–M2228, Ф2228–Ф2234

M2221. Окружности s_1 и s_2 пересекаются в точках K , M . Через точку K проведены касательные к s_2 и s_1 , которые вторично пересекают s_1 и s_2 в точках A и C соответственно. Прямая AM пересекает вторично s_2 в точке B , а прямая CM пересекает вторично s_1 в точке D . Докажите, что $AB = CD$.

И. Рудаков

M2222. Дан клетчатый прямоугольник $6 \times N$ ($N \geq 3$), в котором изначально все клетки покрашены синим. За один ход можно покрасить в красный цвет все единичные квадратики некоторого клетчатого квадрата 2×2 , в котором есть хотя бы три синие клетки (в процессе некоторые клетки могут быть покрашены в красный цвет больше одного раза). Какое максимальное количество ходов можно сделать?

Фольклор

M2223. Решите в целых числах уравнение $x^3 + y^3 + 6xy = 8$.

В.Кириак

M2224. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

А.Акопян

M2225. Найдите все многочлены $f(x)$ такие, что для каждого натурального числа n уравнение $f(x) = n$ имеет хотя бы один: а) целый корень; б) рациональный корень.

П.Кожевников

M2226*. Докажите, что количество целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| \leq n$ равно ко-

личеству целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq k$ для любых натуральных n и k .
В.Голубев (по мотивам Д.Пойа, Г.Сегё)

M2227*. Пусть a, b, c – натуральные взаимно простые в совокупности числа и

$$D_n = \text{НОД}(a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^n + b^n + c^n).$$

- а) Докажите, что при любом n , не делящемся на 3, число D_n может быть сколь угодно велико.
б) Найдите все возможные значения D_n при каждом n , делящемся на 3.

В.Сендеров

M2228*. Треугольник ABC вписан в окружность. На дуге AC (не содержащей B) взяты точки A' и C' так, что $AC \parallel A'C'$. Отрезки BA' и BC' пересекают отрезок AC в точках D и E соответственно. Окружности ω_a и ω_c вписаны в криволинейные треугольники ADA' и SEC' соответственно. Докажите, что точка пересечения внутренних касательных окружностей ω_a и ω_c лежит на биссектрисе угла ABC .

В.Мокин

Ф2228. На гладкой безграничной горизонтальной поверхности нарисован квадрат с длиной ребра $2a$. Ребра квадрата ориентированы в направлениях север–юг и восток–запад. В углы квадрата вертикально вбиты четыре тонких гвоздя, которые выступают над поверхностью. К юго-восточному гвоздю с координатами относительно центра квадрата ($-1a$ на север; $+1a$ на восток) прикреплена тонкая невесомая нерастяжимая нить длиной $100a$, которая выдерживает максимальную силу растяжения F . Нить выпрямлена и вытянута в направлении от места крепления на восток. К свободному концу нити прикреплена шайба малых размеров

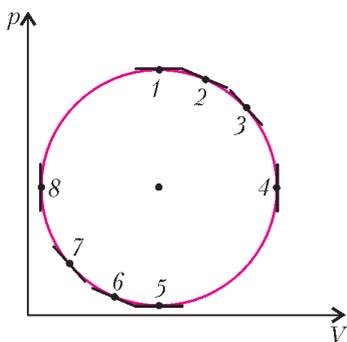
массой m . Шайбе придали толчком скорость v в направлении на север. Какими будут координаты шайбы через время t после толчка? Числовые значения параметров: $m = 1$ кг, $a = 1$ см, $F = 1,18$ Н, $t = 20$ с, $v = 1$ м/с. При решении задачи рекомендуется пользоваться компьютером.

С.Дмитриев

Ф2229. Вокруг Земли летают с выключенными двигателями два спутника. Периоды обращения этих спутников одинаковы и составляют 12 часов. На какое максимальное расстояние могут удалиться друг от друга эти два спутника? Для справки: периоды обращения вокруг Земли всех спутников, летающих на «низких» орбитах, равны примерно 1,5 часа.

А.Полежаев

Ф2230. Фиксированная масса идеального газа участвовала в процессе, который в координатах $p - V$



выглядит почти окружностью (см. рисунок). В точках 1 и 5 этой почти окружности касаются изобары, в точках 2 и 6 – изотермы, в точках 3 и 7 – адиабаты и в точках 4 и 8 – изохоры. На разных участках цикла газ обменивался теплом с окружающей средой. Известны абсолютные величины

количеств теплоты: $Q_{12} = 7$ Дж, $Q_{23} = 2$ Дж, $Q_{34} = 4$ Дж, $Q_{45} = 11$ Дж, $Q_{56} = 5$ Дж, $Q_{67} = 1$ Дж, $Q_{78} = 3$ Дж и $Q_{81} = 12$ Дж. Найдите КПД цикла.

С.Крюков

Ф2231. В тройной точке воды при температуре 273,16 К и давлении водяных паров 610 Па жидкая, твердая и газообразная фазы воды находятся в состоянии термодинамического равновесия. Молекулы газообразной фазы бьются о поверхность конденсированного вещества и создают одинаковые давления и на поверхность льда и на поверхность воды. Оцените отношение «коэффициентов прилипания» молекул к плоским поверхностям конденсированного твердого и конденсированного жидкого веществ при ударе о них молекул, находящихся в газовой фазе при этой температуре (или, что то же самое, оцените отношение скоростей испарения жидкой воды и твердого льда при температуре ≈ 273 К, если над ними вакуум).

С.Тройнов

Ф2232. Средний срок службы ламп накаливания (с номиналами 100 Вт, 220В) и люминесцентных ламп с одинаковой производительностью по свету примерно один и тот же – около 2000 часов. Эффективность ламп накаливания в 5 раз меньше, чем люминесцентных. Стоимости этих ламп отличаются в 15 раз: 10 руб. и 150 руб. за штуку (люминесцентные дороже). При какой стоимости 1 кВт·ч электроэнергии выгодно покупать и использовать более дорогие лампы?

С.Варламов

Ф2233. Каждый сорт стекла характеризуется показателем преломления n_0 в середине оптического диапазона при длине волны $\lambda_0 = 0,55$ мкм и коэффициентом дисперсии β , который показывает, на сколько отличается показатель преломления данного сорта стекла при заданной длине волны λ от его значения при λ_0 : $n_\lambda = n_0 + \beta(\lambda - \lambda_0)$. Имеются два сорта прозрачного стекла с характеристиками $n_{01} = n_{02}$ и $\beta_1 \neq \beta_2$. Нужно изготовить линзы для очков, у которых отсутствовала бы хроматическая aberrация, т.е. оптическая сила не зависела бы от длины волны и равнялась α диоптриям. При этом со стороны, обращенной к глазу, линза очков должна быть вогнутой с радиусом кривизны R_0 , который выбирается примерно равным расстоянию от этой вогнутой поверхности (когда очки используются по назначению) до точки, вокруг которой глаз вращается.

В.Стеклов

Ф2234. Пучок быстрых (но нерелятивистских) нейтронов пересекает пучок медленно движущихся атомов водорода. При какой минимальной энергии нейтронов атомы водорода могут быть ионизованы? Столкновения протонов и нейтронов считайте абсолютно упругими.

А.Томов

Решения задач M2199–M2205, Ф2213–Ф2219

M2199. *Натуральное число, имеющее в десятичной записи n цифр, назовем n -драконом, если оно является точным квадратом и для любого $k = 1, 2, \dots, n - 1$ после вычеркивания k последних цифр (отрубаем хвост дракону) оно будет точным квадратом. Для какого наибольшего n существует n -дракон?*

Ответ: $n = 3$.

Существует 3-дракон – это число 169.

Предположим, что при $n \geq 4$ нашлось число N , являющееся n -драконом. Пусть $N = \overline{a\dots bcd} = y^2$, $\overline{a\dots b} = x^2$. Так как $\overline{a\dots b} \geq 10$, то $x \geq 4$. Имеем $100x^2 + \overline{cd} = y^2$. Если $y \geq 10x + 2$, то $100x^2 + \overline{cd} \geq 100x^2 + 40x + 4$, значит, $\overline{cd} \geq 40x + 4 \geq 40 \cdot 4 = 160$. Следовательно, $y = 10x + 1$, $\overline{cd} = 20x + 1$. Видим, что $x \geq 5$ не подходит, значит, единственная возможность $x = 4$, $\overline{cd} = 81$. Но $N = 1681$ не является 4-драконом.

В.Сендеров

M2200. *Таблица 2×2010 (2 горизонтальных ряда по 2010 клеток) разделена на единичные клетки. Иван ставит горизонтальное домино $\square\square$, которое покрывает в точности две клетки таблицы; затем Петр ставит вертикальное домино $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$, которое покрывает две клетки таблицы; потом Иван снова ставит горизонтальное домино, Петр снова ставит вертикальное домино, и т.д. (каждый раз домино можно ставить только на еще не покрытые клетки). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.*

Попробуйте также изучить эту игру на таблице $2 \times n$ при различных значениях n .

Покажем, что в этой игре Иван имеет выигрышную стратегию.

Разобьем таблицу на 502 прямоугольника 2×4 и один прямоугольник 2×2 . Пусть Иван первым ходом поставит свое горизонтальное домино в две клетки прямоугольника 2×2 . Далее, Петр ставит домино в некоторый прямоугольник 2×4 , Иван отвечает ходом в тот же прямоугольник. Легко видеть, что Иван всегда может ответить на ход Петра, и следовательно, он не проиграет.

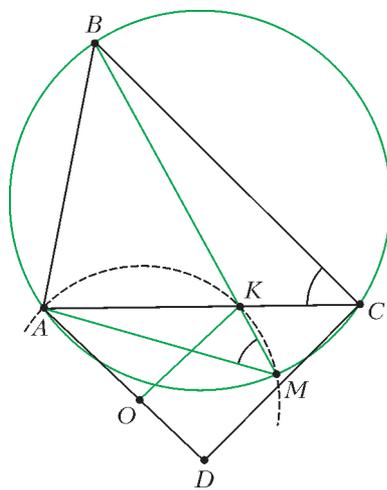
См. также статью «Обобщение задачи M2200» в этом номере журнала.

Э.Колев

M2201. Рассматриваются прямые, проходящие через вершину B треугольника ABC , пересекающие сторону AC в точке K , а описанную окружность треугольника ABC – в точке M , отличной от B . Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников AMK .

Пусть O – центр описанной окружности треугольника AMK .

Предположим, что в треугольнике ABC угол C тупой (см. рисунок). Так как $\angle AMK = \angle AMB = \angle C$, то $\angle AOK = 2\angle C$ и $\angle OAC = 90^\circ - \angle C$, т.е. этот угол не зависит от прямой, проходящей через B . Следовательно,



но, всевозможные точки O лежат на фиксированной прямой AD , где ADC – равнобедренный треугольник с основанием AC и углом $\angle CAD = 90^\circ - \angle C$ такой, что точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC . Так как $OK \parallel CD$, то при движении точки K от A к C точки O заполняют отрезок AD – это и есть искомое ГМТ.

В случае $\angle C > 90^\circ$ аналогичные рассуждения дают искомое ГМТ как боковую сторону AD равнобедренного треугольника ACD с основанием AC и углом $\angle CAD = \angle C - 90^\circ$ такого, что точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC .

Ю.Блинков

M2202. Дана арифметическая прогрессия из 22 различных натуральных чисел, каждое из которых является точной степенью (т.е. степенью натурального числа, большей 1). Докажите, что разность этой прогрессии больше 2010.

Пусть a_1, a_2, \dots, a_{22} – данная прогрессия, d – ее разность. Докажем, что d делится на 2, 3, 5, 7 и 11. Тогда d делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$, и, значит, $d \geq 2310$.

Пусть p – одно из чисел 2, 3, 5, 7 и 11, и предположим, что d не делится на p .

Среди p первых членов прогрессии найдется делящийся на p . Действительно, иначе среди чисел a_1, a_2, \dots, a_p нашлись бы два числа с равными остатками при делении на p ; пусть это a_k и a_l , где $1 \leq k < l \leq p$. Тогда $a_l - a_k = (l - k)d$ должно делиться на p , но это неверно, так как p – простое, а d и $l - k$ не делятся на p . Так, пусть, скажем, a_m делится на p , где $m \leq p$. Заметим, что $a_{m+p} = a_m + pd$ тоже делится на p ($m + p \leq 2p \leq 22$). Разность $a_{m+p} - a_m = pd$ не делится на p^2 . Таким образом, числа a_m и a_{m+p} , делящиеся на p , одновременно не могут делиться на p^2 . Тем самым, хотя бы одно из них не является точной степенью. Противоречие.

Замечание. Можно доказать (с помощью китайской теоремы об остатках), что найдется сколь угодно длинный отрезок натурального ряда, не содержащий точных степеней (в частности, не существует бесконечной арифметической прогрессии из точных степеней); однако для любого N можно найти арифметическую прогрессию из N точных степеней.

Отметим, что идея решения сходна с решением задачи об оценке разности арифметической прогрессии, состоящей из простых чисел. Совсем недавно австралийский математик Теренс Тао и английский математик Бен Грин доказали, что для любого N можно найти арифметическую прогрессию из N простых чисел.

П.Кожевников

M2203. Дан правильный (mn) -угольник. Среди его вершин t вершин покрашены красным, а n – синим (никакая вершина не покрашена дважды). Докажите, что некоторый отрезок с концами в красных точках равен некоторому отрезку с концами в синих точках.

Опишем вокруг (mn) -угольника окружность, и будем считать, что длина дуги между соседними вершинами равна 1. Пусть A_1, \dots, A_m – красные вершины, а B_1, \dots, B_n – синие. Рассмотрим mn дуг вида $A_i B_j$, которые от A_i к B_j проходятся против часовой стрелки. Каждая такая дуга может быть равной по длине одному из чисел $1, 2, \dots, mn - 1$, поэтому найдутся две различные равные дуги $A_i B_{j_1}$ и $A_{i_2} B_{j_2}$. Тогда эти дуги совмещаются поворотом вокруг центра окружности. Это означает, что дуги $A_i A_{i_2}$ и $B_{j_1} B_{j_2}$ равны, значит, $A_i A_{i_2}$ и $B_{j_1} B_{j_2}$ – искомая пара равных отрезков.

Замечание. Интересно, что с помощью идеи решения этой задачи можно получить решение следующей непростой задачи (M463).

Даны натуральные числа $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ такие, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n = s < mn.$$

Докажите, что в равенстве

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

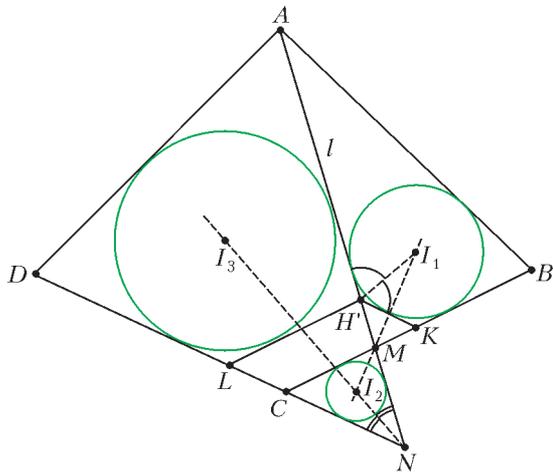
Действительно, можно разбить окружность длины s на s равных дуг длины 1, отметить красным t точек разбиения на дуги длиной x_1, x_2, \dots, x_m и синим – n

точек разбиения на дуги длиной y_1, y_2, \dots, y_n . Из наличия дуги с красными концами, равной дуге с синими концами, вытекает нужное утверждение.

И. Богданов, С. Берлов, П. Кожевников

M2204. Дан четырехугольник $ABCD$, описанный около окружности. Прямая l проходит через вершину A , пересекает отрезок BC в точке M и луч DC – в точке N . Пусть I_1, I_2, I_3 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, MNC, NDA . Докажите, что прямая l проходит через точку пересечения высот треугольника $I_1I_2I_3$.

Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 – окружности, вписанные в треугольники ABM, MNC, NDA соответственно, H – точка пересечения высот треугольника $I_1I_2I_3$. Пусть касательная к ω_1 , параллельная CD (ближайшая к CD из двух таких касательных), пересекает BC в точке K и пересекает l в точке H' (см. рисунок). Пусть прямая,



проведенная через H' параллельно BC , пересекает DC в точке L . Так как четырехугольники $ABCD$ и $ABKH'$ описанные, то

$$\begin{aligned} AD + LH' &= AD + CK = AD + CB - KB = \\ &= CD + AB - KB = CD + AH' - H'K = \\ &= CD + AH' - CL = LD + AH'. \end{aligned}$$

Мы получили равенство, показывающее, что четырехугольник $AH'LD$ также описанный, и, значит, LH' касается окружности ω_3 .

Углы $AH'K$ и DNA имеют параллельные стороны, поэтому прямые $H'I_1$ и I_2I_3 , являющиеся биссектрисами этих углов, перпендикулярны. Аналогично, $H'I_3 \perp I_1I_2$. Значит, $H'I_1$ и $H'I_3$ – высоты треугольника $I_1I_2I_3$, поэтому H' совпадает с H , что завершает доказательство.

Комментарии. Имеются и другие красивые решения задачи.

Например, можно использовать тот факт, что вторая общая внутренняя касательная окружностей ω_1 и ω_2 проходит через C (см. статью «Описанные четырехугольники и ломаные», в «Кванте» № 1 за 2010 г.). В условии нашей задачи при отражении прямой l относительно сторон треугольника $I_1I_2I_3$ получаются прямые BC, DC и вторая общая внутренняя касатель-

ная окружностей ω_1 и ω_2 . Теперь достаточно воспользоваться известным критерием: прямая проходит через ортоцентр треугольника тогда и только тогда, когда три прямые, симметричные ей относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

Можно рассуждать и по-другому. Подсчетом углов доказывается, что C лежит на описанной окружности треугольника $I_1I_2I_3$. Легко видеть, что точки, симметричные C относительно прямых I_1I_2 и I_2I_3 , лежат на прямой l . Остается воспользоваться известным фактом: при отражении точки, лежащей на описанной окружности треугольника, относительно его сторон, полученные три точки лежат на одной прямой, содержащей ортоцентр.

Н. Белухов, П. Кожевников, В. Мокин

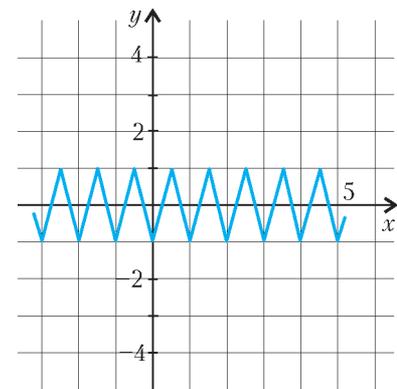
M2205* На рисунке изображен график функции $g(x)$, т.е. $g(x)$ – периодическая функция с периодом 1 такая, что

$$g(x) = \begin{cases} 4x - 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -4x - 1, & \text{если } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Положим $f(x) = x + g(x)$. Для данного действительного числа t определим последовательность $\{s_n(t)\}$ следующим правилом:

$$s_0(t) = t, \quad s_{n+1}(t) = f(s_n(t)) \text{ при } n \geq 0.$$

Докажите, что для некоторого числа t_0 последовательность $\{s_n(t_0)\}$ всюду плотна, т.е. для любых чисел $a < b$ найдется номер n такой, что $a < s_n(t_0) < b$.



Как нетрудно видеть, график функции $f(x)$ состоит из отрезков прямых: на отрезках $\left[k; k + \frac{1}{2}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$) это линейная функция с угловым коэффициентом 5, а на отрезках $\left[k + \frac{1}{2}; k + 1\right]$ это линейная функция с угловым коэффициентом -3 .

Для некоторого множества X числовой прямой и неотрицательного целого n обозначим через $f^n(X)$ множество $\{s_n(t) | t \in X\}$. В частности, $s_n(t) = f^n(t)$. Если X – это отрезок числовой прямой, то $f^n(X)$ – также отрезок.

Докажем следующую лемму:

Для любых отрезков $[a; b]$ и $[c; d]$ найдется целое неотрицательное число n такое, что $[a; b] \subset f^n([c; d])$.

Доказательство. Пусть длина отрезка $[c; d]$ меньше 1. Тогда некоторый его подотрезок $[c'; d']$ длины не

меньше $\frac{d-c}{2}$ принадлежит одному отрезку вида $\left[\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}\right]$ для некоторого целого k . Тогда длина отрезка $f([c'; d'])$ не менее $3(d' - c') \geq \frac{3}{2}(d - c)$ (так как на отрезке $\left[\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}\right]$ угловой коэффициент прямой, задающей $f(x)$, по абсолютной величине не меньше 3). Таким образом, длина отрезка $f([c; d])$ больше, чем длина отрезка $[c; d]$, по крайней мере в $\frac{3}{2}$ раза. Значит, для некоторого натурального n длина отрезка $f^n([c; d])$ станет не меньше 1. Тогда отрезок $f^n([c; d])$ содержит целиком отрезок $\left[\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}\right]$ для некоторого целого k , значит, $f^{n+1}([c; d])$ содержит целиком отрезок вида $\left[m; m + \frac{1}{2}\right]$ для некоторого целого m . Далее легко видеть, что $f^n\left(\left[m; m + \frac{1}{2}\right]\right) = \left[m - n; m + n + \frac{1}{2}\right]$, поэтому при достаточно большом n отрезок $f^n\left(\left[m; m + \frac{1}{2}\right]\right)$ будет покрывать данный отрезок $[a; b]$. Лемма доказана.

Для натурального n положим $f^{-n}(X) = \{t \mid f^n(t) \in X\}$. Нетрудно видеть, что если X – отрезок, то $f^{-n}(X)$ – объединение конечного числа отрезков (ненулевой длины) и, возможно, конечного числа точек. Занумеруем $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ все отрезки вида $[a; b]$, где $a < b$ – рациональные числа. Достаточно доказать, что для некоторого t_0 последовательность $\{f^n(t_0)\}$ имеет непустое пересечение с каждым отрезком Δ_i .

Рассмотрим произвольный отрезок $[c_1; d_1]$. Найдем номер n_1 такой, что $\Delta_1 \subset f^{n_1}([c_1; d_1])$. Тогда найдется отрезок $[c_2; d_2] \subset f^{-n_1}(\Delta_1) \cap [c_1; d_1]$. Продолжаем так далее: имея отрезок $[c_k; d_k]$, найдем номер n_k такой, что $\Delta_k \subset f^{n_k}([c_k; d_k])$. Тогда найдется отрезок $[c_{k+1}; d_{k+1}] \subset f^{-n_k}(\Delta_k) \cap [c_k; d_k]$.

Для цепочки вложенных отрезков $[c_1; d_1] \supset [c_2; d_2] \supset \dots$ существует точка t_0 , которая принадлежит им всем. Тогда t_0 – искомое число: в самом деле, $f^{n_k}(t_0) \in \Delta_k$, так как $t_0 \in [c_{k+1}; d_{k+1}]$.

Д. Фон-Дер-Флаасс

Ф2213. После удара первого натуралиста палкой по стволу дерева пчелы вылетают из дупла, расположенного высоко – на высоте $H = 30$ м – на дереве, и разлетаются во все стороны со скоростями 1 м/с в поисках нарушителей их спокойствия. Каждую секунду наружу выбираются 1000 пчел. Второй натуралист (участник эксперимента) с очень чувствительным микрофоном расположился на соседнем дереве на расстоянии 30 м от «пчелиного» дерева на той

же высоте, что и пчелиное гнездо. Он записывает жужжание, производимое пчелами. Почва под деревьями покрыта старой листвой и практически не отражает звук. Как менялась со временем громкость звука до того момента, пока «чистота» эксперимента не была нарушена воплями натуралистов?

Учтем, что имеется явная симметрия распределения мощности звука по направлениям. Частота взмахов крыльями у пчел составляет величину порядка 100 Гц. Это означает, что характерные длины волн звуков имеют порядок 3 м, что во много раз больше размеров пчелы. Концентрация пчел заметно убывает с расстоянием от гнезда, поэтому поглощением звука самими пчелами можно пренебречь. Если каждая пчела производит звук мощностью W , то к моменту времени t общая энергия звуков, производимая всеми пчелами, равна NWt , где $N = 1000$ 1/с. (Скорость звука во много раз больше скорости полета пчел, поэтому задержку во времени $\sim 0,1$ с можно не учитывать.) Эта звуковая энергия равномерно распределяется по всем направлениям. Таким образом, получается, что до того момента, когда пчелы доберутся до натуралистов, громкость звука, регистрируемая микрофоном, нарастает со временем линейно.

Ж. Фарб

Ф2214. Найдите минимальную скорость движения границы полной тени Луны по поверхности Земли во время солнечного затмения. Считайте, что орбита Луны при ее движении вокруг Земли круговая и лежит в плоскости орбиты, по которой Земля движется вокруг Солнца. Расстояние от Земли до Луны примерно в 60 раз больше радиуса Земли.

Свяжем систему отсчета с Землей и назовем ее «системой отсчета Птолемея» – СОП. За сутки, т.е. за время T одного оборота Земли вокруг своей оси, Солнце в СОП совершает полный оборот вокруг Земли, при этом угловая скорость движения Солнца составляет $\omega_C = 2\pi/T$. Луна же за сутки совершает чуть меньше полного оборота, и ее угловая скорость ω_L тоже соответственно меньше. Среднее расстояние от Земли до Луны равно $r = 60R_3 \approx 384$ тыс. км, и оно во много раз (~ 400) меньше расстояния R от Земли до Солнца, которое в таком случае можно считать бесконечно большим.

Известно, что фазы Луны повторяются через 29,5 суток – это так называемый синодический период. Следовательно, угловые скорости ω_C и ω_L связаны соотношением

$$\omega_C - \omega_L = \Delta\omega = \frac{2\pi}{29,5T}.$$

Если лучи Солнца, закрываемые Луной, падают на Землю не перпендикулярно ее поверхности, то скорость движения тени будет тем больше, чем больший угол образуют падающие лучи с вертикалью. Поэтому скорость движения границы полной тени Луны по поверхности Земли будет минимальной, когда затмение Солнца наблюдается в момент нахождения Солнца в зените, т.е. прямо над головой наблюдателя.

Если бы в СОП угловые скорости движения Солнца и Луны совпадали и Луна находилась между Землей и Солнцем, то тень Луны перемещалась бы с востока на запад со скоростью

$$\omega_C R_3 = \frac{2\pi R_3}{T} \approx 463 \text{ м/с}.$$

А поскольку Луна вращается медленнее Солнца, скорость движения тени будет направлена в противоположную сторону, т.е. с запада на восток, и равна

$$\Delta\omega r - \omega_C R_3 = \frac{2\pi \cdot 60 R_3}{29,5T} - \frac{2\pi R_3}{T} \approx 469 \text{ м/с}.$$

Например, во время солнечного затмения 1 августа 2008 года Солнце не находилось в зените, и минимальная скорость движения тени составляла 507 м/с.

В.Славутинский

Ф2215. Куб с ребром A и с равномерно распределенной по объему массой M , начальная скорость которого v направлена вдоль четырех ребер куба, движется в разреженном газе с концентрацией n молекул с массой $m \ll M$ и температурой T . Удары молекул о гладкие стенки куба абсолютно упругие. Длина свободного пробега молекул много больше ребра куба, т.е. $\lambda \gg A$, а $n \gg 1/A^3$. Каково ускорение куба? Рассмотрите только два крайних случая: а) $v^2 \gg kT/m$; б) $v^2 \ll kT/m$.

Поскольку газ разрежен, после удара какой-либо молекулы о стенку куба они – куб и молекула – потом долго не встречаются. Скорости молекул имеют составляющие вдоль и поперек скорости куба \vec{v} . Поперечные составляющие скоростей молекул после ударов о стенки куба по величине не изменяются, так как стенки куба гладкие и удары абсолютно упругие. По отношению к направлению движения куба естественно назвать одну из его граней передней, а противоположную ей – задней. Удары молекул о переднюю грань тормозят куб, а удары о заднюю грань подгоняют его.

В случае а) молекулы никогда не ударяются о заднюю грань куба, и движением газа вообще можно пренебречь. Тогда каждая молекула, столкнувшись с передней гранью куба, приобретает скорость $2\vec{v}$, т.е. получает от куба импульс $2m\vec{v}$. За время t с передней гранью столкнутся $N = vtA^2n$ молекул. Поэтому ускорение куба будет равно

$$\vec{a} = -\vec{v} \frac{2Nm}{Mt} = -\vec{v} \frac{2mvA^2n}{M}.$$

В случае б) молекулы ударяются и о переднюю и о заднюю грани куба. Величины составляющих скоростей молекул при таких ударах изменяются: на передней грани возрастают на $2v$, а на задней убывают на $2v$. За время t на передней грани происходит примерно $tA^2n(v + \sqrt{kT/(2m)})/2$ ударов, а на задней – примерно $tA^2n(-v + \sqrt{kT/(2m)})/2$ ударов. В результате ускорение куба будет равно

$$\vec{a} = -\vec{v} \frac{2mvA^2n}{M}.$$

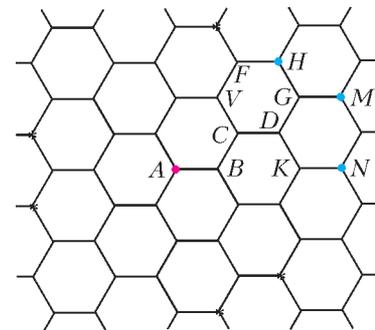
Заметим, что формулы для ускорений в обоих частных случаях получились одинаковыми. Попробуйте самостоятельно рассмотреть общий случай, когда не выполняется ни условия а), ни условие б).

А.Кубов

Ф2216. Имеется гексагональная бесконечная сетка. Каждые два узла сетки характеризуются минимальным количеством «мостиков», которые нужно преодолеть, чтобы из одного узла перебраться в другой. Каждое звено такой сетки, расположенное между двумя соседними узлами, имеет сопротивление R . К каждому узлу сетки подключены три таких звена. От узла A можно вдоль проволочек (звеньев) сетки передвинуться к трем ближайшим узлам B сетки. От этих трех узлов по другим проволочкам можно перебраться к следующим по удаленности от точки A шести узлам C . Начиная с этих узлов C , симметрия перемещения по мостикам нарушается. Если батарейка подключена к двум узлам сетки, расположенным очень далеко друг от друга, то от каждого узла C токи, уходящие по двум проволочкам к следующим по удаленности от A узлам, имеют два разных значения, и их отношение неизвестно. Предположим, что отношение токов равно k . Найдите сопротивление сетки между узлом A и некоторыми узлами сетки, которые отстоят от A на 5 проволочек-мостиков.

На рисунке изображен участок бесконечной гексагональной сетки и на нем отмечены несколько узлов.

Будем вести отсчет от узла A . Пятью (минимум) мостиками с узлом A связаны узлы, обозначенные буквами H, N, M . Конечно, есть и другие узлы с таким же минимальным количеством мостиков от них до узла A , но они по расположению эквивалентны отмеченным трем узлам.



Согласно условию задачи, отношение токов, разбегающихся от узла C , в мостиках CV и CD равно k . В мостике CV течет ток $I_{CV} = k\varepsilon/(6R)$, где ε – напряжение батарейки, а в мостике CD течет ток $I_{CD} = (1-k)\varepsilon/(6R)$. Тогда на участке VF течет ток $2k\varepsilon/(6R)$, а на участке FH течет ток такой же, как на участке CV , т.е. $k\varepsilon/(6R)$. Узлы, эквивалентные узлу H , отмечены на рисунке звездочками.

Итак, нашлись пять мостиков, соединяющих узел A с другими узлами сетки, на которых можно найти падения напряжения. До узлов, отмеченных буквами M и N , нельзя добраться по мостикам, падения напряжения на которых известны.

Если в узел A с помощью батарейки «запустить» ток I , а из узла H «вынуть» такой же ток с помощью другой такой же батарейки, то падения напряжения на мости-

как будут такими:

$$U_{AB} = \frac{IR}{3} + \frac{kIR}{6}, \quad U_{BC} = \frac{IR}{6} + \frac{2kIR}{6}, \quad U_{CV} = \frac{2kIR}{6},$$

$$U_{VF} = \frac{2kIR}{6} + \frac{IR}{6}, \quad U_{FH} = \frac{kIR}{6} + \frac{IR}{3}.$$

В результате получаем, что при токе I напряжение между точками A и H равно

$$U_{AH} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CV} + U_{VF} + U_{FH} = IR \left(1 + \frac{4k}{3} \right).$$

А сопротивление между этими точками составляет

$$R_{AH} = \frac{U_{AH}}{I} = R \left(1 + \frac{4k}{3} \right).$$

С.Узлов

Ф2217. На длинных невесомых и нерастяжимых нитях, прикрепленных к потолку, висят три стальных сплошных шара диаметрами $3D$, $2D$ и D . В равновесном положении все нити вертикальны, центры шаров находятся на одинаковых расстояниях $L \gg D$ от потолка и на одной горизонтальной линии, причем шары почти касаются друг друга. Посередине находится шар диаметром $2D$. Шар диаметром $3D$ отводят от положения равновесия так, что нить, к которой он прикреплен, остается выпрямленной, находится в той же плоскости, что и две другие нити, и образует с вертикалью угол $\alpha \ll 1$. Шар отпускают. Найдите максимальный угол β отклонения нити, удерживающей шар диаметром D , после первой серии ударов шаров. Считайте все удары абсолютно упругими.

Перед первым ударом скорость шара массой M_3 будет равна

$$v_{M_3} = \sqrt{2Lg(1 - \cos \alpha)}.$$

Известно, что если до встречи двух шаров один из них массой M_1 покоился, а второй массой M_2 двигался со скоростью v , то после лобового абсолютно упругого удара скорость шара, который до встречи покоился, равна $2vM_2/(M_1 + M_2)$. В рассматриваемом случае происходят последовательно два таких события, причем массы шаров пропорциональны кубам их диаметров, поэтому скорость шара массой M_1 после серии двух ударов будет равна

$$v_{M_1} = v_{M_3} \frac{2(3D)^3}{(3D)^3 + (2D)^3} \frac{2(2D)^3}{D^3 + (2D)^3} = \frac{76}{35} \sqrt{2Lg(1 - \cos \alpha)}.$$

При этом нить, на которой подвешен этот шар, отклонится от вертикали на угол β , связанный с углом α соотношением

$$\left(\frac{76}{35} \right)^2 (1 - \cos \alpha) = 1 - \cos \beta.$$

Поскольку углы α и β небольшие, воспользуемся приближенными формулами для расчета тригонометрических функций и получим

$$\beta \approx \frac{76}{35} \alpha.$$

Д.Шаров

Ф2218. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента при напряжениях, не превышающих по модулю некоторой величины U_0 , имеет вид $I = \alpha U^3$. Два диода, включенные параллельно друг другу так, что «плюс» одного соединен с «минусом» другого, имеют похожую характеристику. При подаче на такой элемент напряжения, изменяющегося по гармоническому закону $u = U_0 \cos \omega t$, в частотном спектре тока присутствуют первая и третья гармоники. Каково отношение их амплитуд?

Известно, что куб косинуса угла α можно представить в виде суммы гармонических функций, изменяющихся со временем по законам $\cos \alpha$ и $\cos 3\alpha$. В нашем случае

$$\cos^3 \omega t = \frac{\cos 3\omega t}{4} + \frac{3 \cos \omega t}{4}.$$

Следовательно, отношение амплитуд первой и третьей гармоник равно 3.

В.Поляков

Ф2219. В недалеком будущем на уроке физики в школе на Луне проводится такой эксперимент. Сплошной плоский стальной лист большой площади и одинаковой по всей площади толщиной – плиту – окунают в расплавленный парафин, вынимают и дожидаются, когда он остынет. Плита покрывается тонкой пленкой парафина, который не смачивается водой. Плиту аккуратно опускают на поверхность воды в сосуде, и она не тонет. Какова максимальная толщина используемой в эксперименте плиты? Ускорение свободного падения на поверхности Луны равно $1,6 \text{ м/с}^2$. Сталь, парафин и вода на Луне такие же, как и на Земле.

Часть плиты, находящаяся на глубине по отношению к уровню свободной поверхности воды в сосуде, испытывает выталкивающее действие, поэтому чем больше эта глубина, тем больше может быть толщина плиты. Самая большая глубина соответствует случаю, когда вода вот-вот начнет растекаться по поверхности плиты. Поскольку парафин не смачивается водой, плоскость, касательная к поверхности воды в месте, где она соприкасается с парафином, является также касательной плоскостью и к плите. Тогда глубину h , на которой находится верхняя поверхность плиты по отношению к горизонтальной поверхности воды в сосуде вдали от плиты, можно найти из соотношения

$$2\sigma = \frac{\rho_B g h^2}{2},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения воды, ρ_B – плотность воды. Отсюда следует, что

$$h = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_B g}}.$$

Если толщина стальной плиты d , а плотность $\rho_{ст}$, то условие ее плавания в воде таково:

$$\rho_B (d + h) = \rho_{ст} d, \text{ или } d + h = 7,8d.$$

Отсюда легко найти максимальную толщину плиты:

$$d = \frac{h}{6,8} = \frac{1}{3,4} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_B g}} \approx 1,9 \text{ мм}.$$

Д.Ломов

Обобщение задачи M2200

Задача M2200 была предложена Эмилом Колевым на Болгарской национальной олимпиаде в 2010 году.

Авторское решение использует парную стратегию. С помощью вариаций такой стратегии задача решается для таблицы размерами $2 \times n$, где n не дает остаток 1 при делении на 4.

Мы докажем, что при любом достаточно большом n (покажем это для $n \geq 300$) при игре на таблице $2 \times n$ Иван имеет выигрышную стратегию, причем независимо от того, кто делает первый ход.¹

Опишем возможную стратегию Ивана.

Вся таблица состоит из n вертикалей. Скажем, что Иван своим ходом занимает вертикаль, если до хода обе клетки вертикали были свободны и своим ходом Иван ставит доминошку на одну из клеток этой вертикали. Тем самым, после того как Иван занимает вертикаль, Петр не может поставить домино в эту вертикаль. Выделим в таблице подряд слева $k = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ прямоугольников 2×4 (здесь, как обычно, $\lfloor x \rfloor$ означает целую часть числа x).

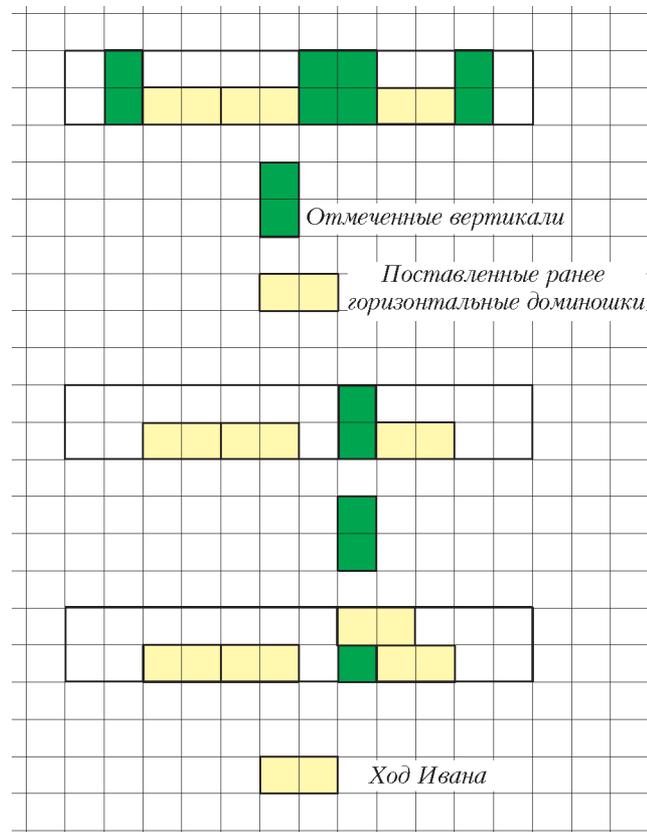
1 этап. В свои первые k ходов Иван ставит по одной доминошке в каждом из k прямоугольников 2×4 (если Петр ставит домино в некоторый прямоугольник 2×4 , в котором еще нет горизонтального домино, Иван отвечает ходом в тот же прямоугольник; иначе Иван ставит свое горизонтальное домино в свободный прямоугольник 2×4). Тем самым, после k своих ходов Иван уже занял $2k$ вертикалей (по две вертикали в каждом прямоугольнике 2×4). Будем считать, что на 1 этапе Иван ставит свои доминошки в нижнюю горизонталь.

2 этап. Далее, объединим прямоугольники 2×4 в $m = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$ прямоугольников 2×12 . Назовем прямоугольник 2×12 *хорошим*, если в нем поставлено не более трех вертикальных доминошек и в каждом из трех прямоугольников 2×4 , на которые он разбивается, поставлено ровно по одной горизонтальной доминошке.

Рассмотрим некоторый хороший прямоугольник и отметим в нем вертикали, не содержащие клеток горизонтальных доминошек, но которые примыкают к горизонтальным доминошкам (см. рисунок). Нетрудно видеть (простой перебор), что отмеченных вертикалей всегда не меньше 4, значит, хотя бы одна из них свободна. Если в этот момент Иван должен делать ход, то он может занять эту вертикаль.

Таким образом, если Иван занял в хорошем прямоугольнике 2×12 еще одну (седьмую из двенадцати) вертикаль, то за всю игру Петр поставит в нем не более 5 вертикальных доминошек, а Иван сможет поставить не менее 6 горизонтальных доминошек.

¹ При желании из приведенного решения можно оценить цену игры, т.е. разность количеств поставленных горизонтальных и вертикальных доминошек при правильной игре обоих партнеров.



Далее Иван может действовать следующим образом: если в данный момент хотя бы один из прямоугольников 2×12 хороший, то Иван ставит в нем горизонтальную доминошку так, чтобы занять новую вертикаль;

так Иван займет вертикаль хотя бы в $l = \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$ хороших прямоугольниках 2×12 . Действительно, пусть Иван сделал $t \leq l - 1$ ходов на втором этапе. Тогда остается еще $m - t$ хороших 2×12 , в которых Иван на втором этапе еще не ставил доминошек. Петр к этому моменту игры поставил всего не более $k + t + 1$ доминошек. Но $4(m - t) > k + t + 1$ (так как $5t \leq 5l - 5 \leq m - 5 \leq 4m - k - 2$), поэтому из рассматриваемых $m - t$ хороших 2×12 хотя бы один хороший.

3 этап. Иван заполняет последовательно свободные места над поставленными ранее им горизонтальными доминошками. Всего Иван сделал не менее $I = 6m + 2(k - 3m)$ ходов (не менее 6 ходов в каждом из m хороших 2×12 и не менее 2 ходов в каждом из оставшихся 2×4). Всего Петр сделает не более $P = 5l + 6(m - l) + 2(k - 3m) + (n - 4k)$ ходов (не более 5 ходов в каждом из l хороших 2×12 , не более 6 ходов в каждом из оставшихся 2×12 , не более 2 ходов в каждом из оставшихся $k - 3m$ 2×4 , не более $n - 4k$ ходов вне выделенных вначале 2×4). При $n \geq 300$ имеем $l = \lfloor \frac{n}{60} \rfloor \geq 5$, отсюда $I - P = l - (n - 4k) \geq l - 3 \geq 2$. Это означает, что у Петра раньше кончатся ходы.

П. Кожевников

Задачи

1. На рынке продается два одинаковых на вкус сорта слив. В сливах первого сорта косточка занимает треть веса, а в сливах второго сорта — половину веса. Но килограмм слив первого сорта стоит 150 руб, а слив второго сорта — 100 руб. Какие сливы выгоднее покупать?

Т.Караваяева



2. На доске начерчен выпуклый четырехугольник. Алеша сказал: «Его можно разрезать диагональю на два остроугольных треугольника». Боря сказал: «Можно и на два прямоугольных». Вася сказал: «И на два тупоугольных». Оказалось, что ровно один из троих неправ. Кто им может быть (укажите все ответы)?

Б.Френкин

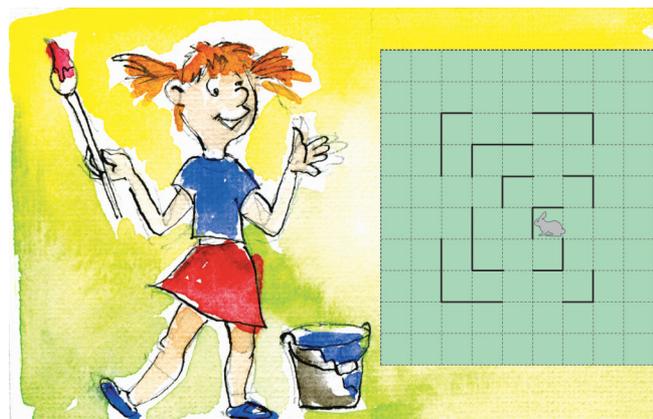


3. Внутри забора, представляющего собой замкнутую несамопересекающуюся ломаную, заперт кролик. На рисунке видна только часть забора. Нарисуйте, как мог бы выглядеть весь забор? Забор может идти только по линиям сетки и не должен распадаться на несколько отдельных кусков.

Т.Караваяева, Т.Кутузова, И.Яценко

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 1–4 предлагались на XXXIV Турнире им. М. В. Ломоносова (в несколько измененных формулировках).



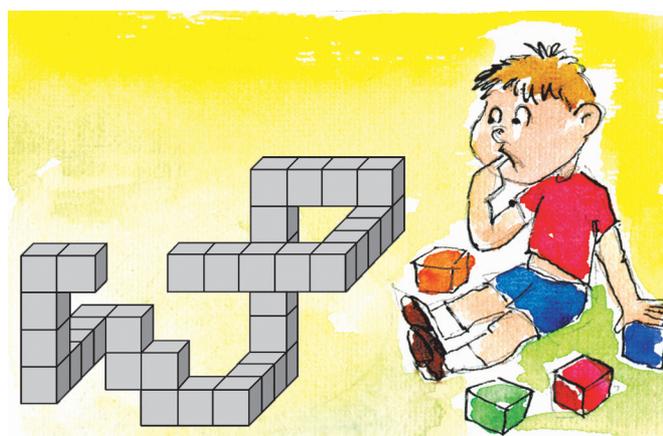
4. Есть двое песочных часов: на 2 минуты и на 5 минут. В первых часах часть песка находится в верхней половине, часть — в нижней, во вторых часах весь песок находится в нижней половине. Как отмерить 8 минут, начиная прямо с текущего момента?

Т.Караваяева



5. На рисунке изображена «змейка» из кубиков. Какое наименьшее число кубиков потребуется, чтобы замкнуть ее?

Фольклор



Иллюстрации Д. Гришуковой

...доказано, что более легкие, чем жидкость, тела, будучи насильно погружены в эту жидкость, движутся вверх с силой, равной тому весу, на который жидкость, имеющая объем, равный этому телу, будет тяжелее последнего.

Архимед

Мы погружены на дно безбрежного моря воздушной стихии, которая, как известно из неоспоримых опытов, имеет вес, причем он наибольший вблизи поверхности Земли...

Эванджелиста Торричелли

Сосуд, наполненный водой, является новым принципом механики и новой машиной для увеличения сил в желаемой степени...

Блез Паскаль

...Полет на свободном аэростате представляет нечто совершенно исключительное.

Камиль Фламмарин

Это и есть уравнение гидростатики. В общем случае оно не имеет решения.

Ричард Фейнман

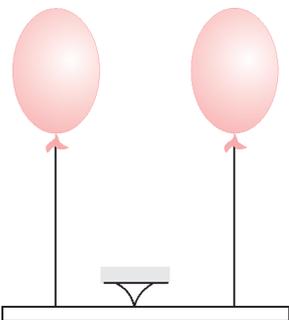
А так ли хорошо знакома вам гидроаэростатика?

Безбрежное небо и неведомые глубины океана всегда влекли человека, побуждая его подняться как можно выше в воздух и опуститься как можно глубже под воду. Более двух тысяч лет назад был установлен один из самых древних законов, с которым вы знакомитесь одним из самых первых в курсе школьной физики, — закон Архимеда. С тех пор можно отсчитывать начало научного освоения двух стихий и рождение гидроаэростатики.

Мысли выдающихся ученых — как верстовые столбы на пути понимания и применения этого закона. Полеты на огромные высоты и глубоководные погружения совершаются сегодня на аппаратах, оснащенных современным оборудованием, не только ради рекордов. Исследования атмосферы, в том числе последствий глобального потепления, разведка с воздуха, доставка грузов в труднодоступные места, совершенствование надводного и подводного флота, изучение морской фауны и флоры, поиски полезных ископаемых под океанским дном — вот неполный список задач, для решения которых необходимы аэростаты и дирижабли, научные суда и батискафы и... лежащий в основе их работы добрый старый закон Архимеда.

Но и в более простых задачах можно обнаружить неожиданные «подводные камни». Однако, не боясь предупреждения Фейнмана, беритесь за них — решения обязательно найдутся!

Вопросы и задачи



1. Что изображено на приведенном здесь рисунке? А если его перевернуть?

2. Два сплошных цилиндра одинаковой массы и равного диаметра, но один алюминиевый, а другой свинцовый, плавают в вертикальном положении в ртути. Какой из них погружен глубже?

3. В двух одинаковых сосудах с водой плавают плоская широкая и высокая узкая коробочки. Когда в каждую из них положили по одинаковому тяжелому грузу, они остались на плаву. В каком из сосудов уровень воды при этом поднялся выше?

4. стакан с наклонными стенками, наполненный водой до краев, взвешивают на весах. Затем взвешивают этот же стакан с опущенным в него деревянным бруском, плавающим так, что вода доходит до краев стакана. Отличаются ли показания весов?

5. В ведре, наполненном доверху водой, плавает дырявая кастрюля. Выльется ли часть воды из ведра, когда кастрюля утонет?

6. Купаясь в речке с илистым дном, можно заметить, что ноги больше вязнут в иле на мелких местах, чем на глубоких. Как это можно объяснить?

7. Для погружения на 10 метров подводная лодка набирает в себя 100 тонн воды. А сколько воды ей надо набрать, чтобы погрузиться на 100 метров?

8. Стальной шарик плавает в ртути. Увеличится или уменьшится глубина его погружения, если повысить температуру?

9. Вес жидкости, налитой в сосуд, равен 3 Н. В жидкость погружают тело. Может ли архимедова сила, действующая на тело, равняться 10 Н?

10. В двух одинаковых сосудах на поверхности воды плавают одинаковые пробковые цилиндры, к которым снизу на тонких нитях привязаны одинаковые грузы, причем один груз находится в воде, а другой лежит на дне сосуда. Одинаков ли вес сосудов со всем, что в них находится?

11. В сосуде с водой плавает кусок льда, удерживаемый натянутой нитью, прикрепленной к дну сосуда. Как изменится уровень воды в сосуде, когда лед растает?

12. Порожнюю закрытую бутылку (с плоским дном) погружают в воду один раз горлышком вниз, а другой раз горлышком вверх на одну и ту же глубину, равную половине высоты бутылки. В каком случае совершается большая работа?

13. Вес любого тела на экваторе примерно на полпро-

цента меньше, чем в северных широтах. Изменяются ли осадка судна и его грузоподъемность при переходе из Северного Ледовитого океана в экваториальные воды? Плотность морской воды считайте везде одинаковой.

14. Со дна высокого стеклянного сосуда, наполненного водой, поднимается небольшой пузырек воздуха. Как изменяется выталкивающая его сила? Каков характер движения пузырька?

15. Из какого материала надо сделать гири, чтобы при точном взвешивании можно было не вводить поправки на уменьшение веса в воздухе?

16. Одинаковые по массе оболочки двух шаров сделаны из разных материалов: одна — из эластичной резины, другая — из прорезиненной ткани. Оболочки шаров наполнили водородом одного и того же объема и отпустили в воздухе. Какой из шаров поднимется на большую высоту?

17. Как зависит подъемная сила аэростата или дирижабля от температуры, при которой производится полет?

18. Чтобы дирижабль мог взлететь, его наполняют газом, более легким, чем воздух. Не лучше ли совсем выкачать из него газ?

19. Почему воздушный шар с закрытым выпускным клапаном, поднявшись на большую высоту, может лопнуть?

20. На дне сосуда с газом лежит тело, плотность которого немного больше плотности газа. Можно ли, повышая давление газа, заставить тело подняться вверх?

Микроопыт

В аквариум прямоугольной формы, наполненный водой, поместите любое тело, которое будет в нем плавать. Можно ли определить массу этого тела без взвешивания?

Любопытно, что...

...хотя Архимед считал себя прежде всего теоретиком, а работу над практическими приложениями относил к деятельности второго сорта, с его именем связывают около 40 изобретений.

...утверждение, получившее в науке имя Паскаля и ставшее одним из основных законов гидростатики, возможно, не в столь явной форме обнаруживается в трудах и Леонардо да Винчи, и Стевина, и Галилея, и Торричелли.

...несмотря на свою историческую важность, закон Архимеда не относится к фундаментальным законам природы. Так, его можно считать прямым следствием закона Паскаля; Стевин довольно просто обосновал его, исходя из принципов равновесия с помощью так называемого метода отвердевания жидкости; закон Архимеда выводится также из закона сохранения энергии.

...чтобы доказать, что пространство над столбиком ртути — в знаменитом опыте с заполненной ею стеклянной трубкой — остается пустым, Торричелли впускал туда воду, которая под действием атмосферного давления врывалась в него «со страшным напором» и целиком его заполняла.

...неосознанно, не пользуясь расчетами, люди издревле опирались на закон Архимеда, когда, например,

необходимо было преодолевать водные преграды. И лишь в 1666 году английский корабль Энтони Дин, к удивлению современников, теоретически определил осадку корабля и прорезал в его бортах отверстия для пушек до его спуска на воду, в то время как раньше это проделывали, когда корабль был уже на плаву.

...к основоположникам аэростатики справедливо причисляют и Роберта Бойля, именем которого назван известный газовый закон. Так, после усовершенствования им насоса для откачки воздуха из резервуаров большого объема тут же возникли проекты по созданию летательных аппаратов, «более легких, чем воздух», причем сразу же предусматривались военные применения таких машин.

...полет людей на воздушном шаре, наполненном горячим дымом, долго не позволял совершить братьям Монгольфье сам французский король, опасаясь за жизнь аэронавтов. Первый полет был осуществлен лишь в 1783 году. И в том же 1783 году (в год своей смерти) великий математик Леонард Эйлер подробно рассчитал подъемную силу аэростата, словно завещал разумно рисковать, опираясь на знания законов физики.

...в 1932 году швейцарский физик Огюст Пикар поднялся на аэростате собственной конструкции в стратосферу на высоту почти 17 километров, а позднее на разработанном им же батискафе погрузился в самую глубокую точку Средиземного моря. В 1960 году его сын Жак на батискафе «Триест» погрузился в Марианскую впадину на рекордную глубину около 11 тысяч метров. Семейную традицию поддержал внук Огюста Пикара — Бертран, совершивший в 1999 году кругосветное путешествие на воздушном шаре «Орбитер» за двадцать дней без промежуточной посадки.

...автор модели расширяющейся Вселенной Александр Фридман занимался еще и метеорологией и в 1925 году принял участие в рекордном по тому времени полете на воздушном шаре до высоты 7400 метров. А Огюст Пикар, научным руководителем которого был автор теории относительности Альберт Эйнштейн, поднимался в небо на аэростате в том числе и для проведения эксперимента, подтвердившего эту теорию.

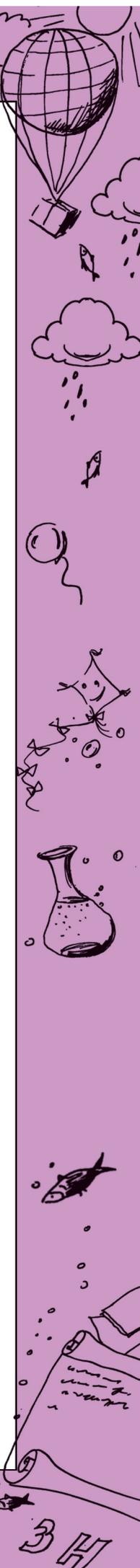
...на смену людям, совершающим глубоководные погружения в батискафах, приходят роботы, «одетые» в специальную керамическую оболочку, позволяющую выдерживать чудовищное давление. Так, в 2009 году американский робот «Нерей» провел на дне Марианского желоба десять часов, выполняя различные измерения.

Что читать в «Кванте» о гидроаэростатике

(публикации последних лет)

1. «Как попасть на Таинственный остров» — 2004, №1, с. 25;
2. «Путешествие на воздушном шаре» — 2004, №3, с.31;
3. «Задачи с жидкостями» — 2006, №1, с.40;
4. «Вверх и вниз через атмосферу» — 2007, №1, с.9;
5. «Гидростатика в стакане» — 2008, №3, с.47;
6. «Устоит ли наш кораблик?» — 2008, №4, с.42;
7. «Силы сопротивления в задачах динамики» — 2009, №1, с.50;
8. «Подводные камни» силы Архимеда» — 2009, №2, с.46;
9. «О плавании одномерных объектов» — 2010, №4, с.36.

Материал подготовил А.Леоневич



Летний турнир имени А.П.Савина «Математика 6–8»

За многие годы стало хорошей традицией приезжать в конце июня в Судиславль для решения математических задач. С 26 июня по 2 июля 2011 года на базе «Берендеевы Поляны» прошел традиционный турнир математических боев имени А.П.Савина для команд 6–8 классов. Участвовали 32 команды. Как обычно, приехало много школьников из Москвы и Санкт-Петербурга. Не обошлось и без постоянных участников турнира – команд Костромы и Черноголовки. Также в турнире приняли участие ребята из Омска, Ульяновска и Ярославля. Организаторы турнира – Г.В.Кондаков и образовательная программа «Большая перемена».

В первый день участники турнира поселились, осмотрелись и собрались на разминочное соревнование – на игру «Математический квадрат», сочетающую в себе решение задач и сложный вариант игры в «крестики-нолики». Среди 6 классов лучшей стала команда Малого мехмата, среди 7 классов – команда Ульяновска (с большим отрывом в 170 очков), среди 8 классов – команда Омска.

Во второй день устная командная олимпиада должна была разделить команды на лиги. Восьмиклассников легко удалось разделить на две лиги: большую (8 команд) высшую и первую (из 4 команд) лиги. Также сразу определились 8 команд, которые составили высшую лигу 6 классов. Оргкомитету турнира пришлось долго думать, как хорошо поделить на лиги остальные команды. Хотелось, чтобы внутри каждой группы боролись соперники, близкие по силе, ведь чем менее предсказуемы результаты боев, тем интереснее турнир. В результате было принято разумное, но достаточно неожиданное для всех решение: лиг сделали больше, чем планировали. Высшая лига 7 классов состояла из четырех лучших команд, первая лига – также из четырех, а остальные команды образовали лигу 6–7 классов.

Далее в течение трех дней шли упорные бои внутри лиг. Если лидерство команды Ульяновска в высшей лиге 7 классов и команды московской школы 179 в первой лиге 8 классов было всем понятно сразу, то в остальных лигах результаты были мало



предсказуемы. В итоге в последний день турнира болельщики разрывались между двумя финальными боями, пытаясь угадать, кто же станет победителем. В лиге 8 классов в упорном сражении выиграла команда московской гимназии 1543, которую подготовил А.В.Спивак. Капитан команды Андрей Волгин третий год подряд увозит с турнира командный диплом I степени. Вторым номером в хит-параде финальных боев стал главный бой в лиге 6 классов, в котором команда Магнитогорска вырвала победу буквально на последней разобранной задаче. Не обошлось и без курьезов: во втором финале высшей лиги 8 классов исход решила излишняя эмоциональность капитана. Сначала он радостно пошел к доске рассказывать решение задачи (при проверке корректности), а на следующей задаче обнаружил, что должен выйти снова... но уже в третий раз (что запрещено правилами). Неожиданная турнирная ситуация сложилась в первой лиге 7 классов, где финал закончился со счетом 30:30, и в итоге первое место присудили обоим командам.

Мы приводим полный список призеров турнира:

<i>Лига</i>	<i>Диплом</i>	<i>Команда</i>	<i>Капитан</i>	<i>Руководитель</i>
Высшая 6	I диплом	Магнитогорск	А.Торшина	А.В.Христева
Высшая 6	II диплом	Гимназия 1514, Москва	В.Понуров	Л.О.Бычкова
Высшая 6	II диплом	Квантик	Д.Николаева	И.А.Николаева
Высшая 6	III диплом	Гимназия 1543, Москва	И.Спиридонов	Ю.В.Паньковская
Высшая 6	III диплом	Сборная Москва-ДНТТМ	Г.Бачкала	Т.П.Зорина
6–7 класс	I диплом	Гимназия 1543, Москва	Д.Харитонов	Ю.В.Паньковская
6–7 класс	II диплом	Ярославль	А.Бакалдин	И.Е.Преображенский
Высшая 7	I диплом	Ульяновск	А.Зимин	Л.М.Самойлов
Высшая 7	II диплом	Школа 179, Москва	В.Румянцев	Г.А.Кузнецов
Первая 7	I диплом	Сборная Кострома-ДНТТМ	Д.Неверов	Э.А. Акопян
Первая 7	I диплом	Лицей 30, Санкт-Петербург	С.Петров	А.В. Садовников
Высшая 8	I диплом	Гимназия 1543, Москва	А.Волгин	А.В.Спивак
Высшая 8	II диплом	Kostroma Open 8	И.Петренко	Д.А.Калинин
Высшая 8	II диплом	Центр образования 218, Москва	А.Зерцалов	Ю.А. Блинков
Высшая 8	III диплом	Гимназия 1514, Москва	И.Брауде-Золотарев	Н.В.Якунина
Высшая 8	III диплом	Омск	Д.Аникеев	А.А. Чемеркин
Первая 8	I диплом	Школа 179, Москва	И.Дмитриев	А.Ю.Юрков
Первая 8	II диплом	Гимназия 1543, Москва	Д.Дмитриев	А.В.Хачатурян

В один из дней турнира прошла личная олимпиада. В 8 классе лучше всех выступил *Андрей Волгин* – жюри решило дать ему «гран-при». Дипломы I степени получили *Юлия Зайцева* и *Максим Гришкин* (школа 179, Москва), *Андрей Гаркавий* (школа 218, Москва), *Дмитрий Аникеев* (Омск) и *Дарья Лебедева* (Фрактал, Санкт-Петербург). Лучшим среди семиклассников стал *Александр Зимин* (Ульяновск), а единственный диплом I степени получил *Федор Селянин* (школа 2007, Москва). По результатам олимпиады 6 классов было выделено двое лучших: «гран-при I» получила *Дарья Николаева* (Квантик, Москва), а «гран-при II» – *Семен Петров* (Ярославль). Дипломы I степени получили москвичи *Тимур Петров* (гимназия 1514), *Анатолий Каламбет* (гимназия 1543), *Кирилл Коваленко* (ДНТТМ), *Евгений Гаранин* (Квантик), а также *Ангелина Торшина* из Магнитогорска. Всего призерами личной олимпиады стали 95 школьников.

Участники турнира активно развлекали себя не только математикой. В свободное от основных соревнований время никогда не пустовали футбольное поле и волейбольная площадка. По вечерам проходили интеллектуальные игры «Что? Где? Когда?», «Завалинка» и другие. В день личной олимпиады ребята ездили на экскурсии. Для желающих было устроено состязание «Бегущий Судиславль».

Отбором задач и составлением вариантов занималась методическая комиссия под руководством А.В.Шаповалова. В нее вошли А.Д.Блинков, Ю.А.Блинков, Н.Т.Мартынова, Е.С.Горская, Э.А.Акопян, Д.А.Калинин, А.В.Хачатурян, Д.В.Прокопенко, Е.А.Чернышева, И.В.Раскина, А.Ю.Юрков, Д.В.Швецов, А.В.Грибалко, Г.Жуков, В.Арутюнов, С.Тихомиров.

Книги и другие призы для победителей предоставили компании «Яндекс», «АВВУУ» и фонд математического образования и просвещения (директор – С.И.Комаров).

Приведем некоторые из задач турнира. У каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит, а если известно, то и ее автор.

Избранные задачи турнира

1 (7). Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Серединный перпендикуляр к отрезку AI пересекает сторону AB в точке A_1 , а серединный перпендикуляр к отрезку CI пересекает сторону CB в точке C_1 . Докажите, что точки A_1 , I и C_1 лежат на одной прямой.

Д.Швецов

2 (7–8). На шахматной доске отметили 12 клеток. Докажите, что среди отрезков, соединяющих центры отмеченных клеток, найдутся три одинаковой длины.

А.Грибалко



3 (8). Точки E и F – середины боковых сторон BC и AD трапеции $ABCD$. На основании AB взяли такие точки M и N , что $MNEF$ – равнобокая трапеция. Докажите, что если M – середина AB , то N равноудалена от C и D .

Д.Калинин

4 (7–8). В строке шестизначных чисел первое число 123456, последнее 654321. Соседние числа отличаются на 1 или на 1000. Ни одно число не делится на 1000. Докажите, что хотя бы одно число делится на 13.

А.Шаповалов

5 (7–8). В треугольнике ABC $\angle ABC = 135^\circ$. На стороне AC отмечены точки M и N (M между A и N) так, что $MB \perp NB$. Отрезки MP и NQ – биссектрисы треугольников AMB и CNB . Докажите, что точка, симметричная точке B относительно прямой PQ , лежит на AC .

Д.Швецов, Д.Прокопенко

6 (7–8). Команды провели турнир по футболу в один круг (каждая сыграла с каждой один раз, победа – 3 очка, ничья – 1, поражение – 0). Оказалось, что у единоличного победителя количество побед меньше, чем количество поражений. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?

А.Блинков, А.Заславский

7 (8). Отрезок AB является общей хордой двух окружностей равного радиуса. Через точку K , лежащую внутри этого отрезка, проведен к нему перпендикуляр, который пересекает окружности в точках C и D (в одной из полуплоскостей с границей AB). Докажите, что точка D является точкой пересечения высот треугольника ABC .

А.Блинков

8 (7–8). В стране 6 городов. Каждые два города соединены авиалинией одной из двух авиакомпаний. Обязательно ли существует замкнутый маршрут из четырех авиалиний одной авиакомпании?

В.Трушков

9 (7–8). Каждая дорога сети связывает два города (не заходя в другие), число дорог конечно, между каждыми двумя городами есть ровно один путь по дорогам (возможно, проходящий через другие города). Имеется ровно 20 тупиков (городов, из которых выходит ровно одна дорога). Маршрут автобуса проходит по кратчайшему пути между какими-то двумя городами, автобус ходит туда и обратно. Известно, что из любого города в любой другой можно доехать автобусами не более чем с одной пересадкой. Каково наименьшее число маршрутов (для любой такой сети)?

Б.Френкин

10 (6–8). В однокруговом турнире участвовали 12 шахматистов. Какое наименьшее количество дней может длиться этот турнир, если каждый его участник играет не более одной партии в день и никакие две партии подряд не играет черными фигурами?

А.Грибалко, С.Токарев

11 (8). В четырехугольнике $ABCD$ угол B тупой, M – середина CD . Докажите, что $AM + BM < AC + AD$.

Ю.Блинков

12 (8). Пусть $\varphi(n)$ – количество чисел от 1 до n , взаимно простых с n , а $\tau(n)$ – количество делителей числа n . Найдите все такие n , что сумма $\varphi(n)$ и $\tau(n)$ равна n .

Г.Жуков

13 (7–8). В записи точного квадрата – ровно 100 цифр. Может ли четных и нечетных цифр быть поровну?

А.Шаповалов

14 (6–8). В языке КОКОКОЛО 3 буквы: К, Л и О. Если в любом месте любого слова этого языка вставить или вычеркнуть любое из буквосочетаний ККО, ООЛ или ЛЛК, то смысл слова от этого не изменится. Одинаковы ли по смыслу слова КЛОК и КОЛОКОЛ?

А.Шаповалов

15 (7–8). На острове живут рыцари и лжецы, всего 100 человек. Каждого из них спросили: «Сколько рыцарей среди твоих друзей на этом острове?» Среди ответов каждое число от 0 до 99 встретилось ровно по одному разу. Сколько на этом острове рыцарей? (Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.)

А.Шаповалов

16 (8). Дан отрезок AB . На этом отрезке взята произвольная точка C , на полученных отрезках AC и BC как на сторонах в одной и той же полуплоскости относительно AB построены квадраты. Постройте с помощью одной линейки без делений квадрат, диагональю которого является отрезок AB .

Н.Москвитин



17* (7–8). Из спичек выложена доска 8×8 так, что каждую клетку ограничивают четыре спички. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы после этого не осталось ни одного контура прямоугольника?

Д.Калинин

18* (8–9). 100 монет достоинствами в 1, 2, 3, ..., 100 пиастра разложили в 76 кошельков (в каждом что-то есть). Разрешается объединять все деньги из любых двух кошельков в один. Докажите, что такими объединениями можно оставить только два непустых кошелька с равными суммами денег.

А.Шаповалов

19 (6–8).** Трех математикам нарисовали на лбу по прямоугольнику (с указанием размеров) и сообщили, что из этих трех прямоугольников можно сложить квадрат. Каждый математик не видит, что у него на лбу, но видит, что изображено у других. Первый сказал, что не может догадаться, каковы размеры прямоугольника у него на лбу. Затем то же самое сказал второй математик. Найдите отношение сторон прямоугольника на лбу третьего математика.

А.Шаповалов

20 (7–8).** В ряд стоят несколько стаканов – вниз или вверх дном. За одну операцию разрешается выбрать стакан вверх дном и перевернуть его соседей (двух – если стакан не крайний, одного – если крайний; выбранный стакан не переворачивается). Докажите, что такими операциями можно из любого расположения стаканов получить симметричное ему (т.е. такое же, но справа налево).

А.Лебедев, А.Шаповалов

Публикацию подготовили Д.Калинин, А.Шаповалов

О законе Паскаля и физике сливного бачка

А. ГИМЕЛЕВ, С. ДВОРЯНИНОВ

В НАШЕЙ ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ МЫ ПОСТОЯННО СТАЛКИВАЕМСЯ с проявлениями разнообразных физических законов. Они лежат в основе функционирования различных устройств, механизмов и машин. Со временем эти устройства совершенствуются. Вот об одном таком усовершенствовании мы и хотим сейчас рассказать. Речь пойдет о весьма прозаической конструкции, а именно о...сливном бачке, этом непримечательном атрибуте современных благоустроенных домов.

Кто и когда изобрел сливной бачок – это отдельный рассказ из истории техники. Сейчас нас интересует физическая сторона этого механизма. Ясно, что сливной бачок функционирует циклически. Пусть в начальный момент времени бачок полностью наполнен водой. По мере необходимости открывается выпускной сливной клапан, расположенный в нижней части бачка. Это делается вручную, и вода из сливного бачка выливается. Затем сливной клапан под действием силы тяжести закрывает сливное отверстие. В это время в бачок из подведенной к нему трубы начинает поступать вода, чтобы вновь наполнить бачок водой. Но не более того. Как только бачок наполнится, дальнейшее поступление воды должно быть прекращено. Это делается автоматически с помощью несложного устройства.

Устройство представляет собой Г-образный рычаг, закрепленный на горизонтальной оси и вращающийся в вертикальной плоскости (рис. 1 и 2). На одном конце рычага закреплен поплавок – пластмассовый шар диаметром 4–5 см, на другом



Рис. 1

конце – резиновый клапан. По мере поступления воды в бачок поплавок поднимается вверх и поворачивает рычаг (на рисунке 2 – против часовой стрелки). При этом резиновый клапан приближается к трубе. Когда вода достигает требуемого уровня, поплавок поднимается вверх на максимальную высоту, и клапан полностью перекрывает поступление воды в бачок. Цикл завершен. Бачок снова можно использовать по назначению.

После приведенного описания устройства возможны уже и некоторые расчеты (которые при желании вы можете проделать). Насколько длинными должны быть плечи рычага? Каким должен быть объем поплавка, чтобы действующая на него выталкивающая сила Архимеда смогла преодолеть силу давления воды на клапан, который закрывает трубу? За-

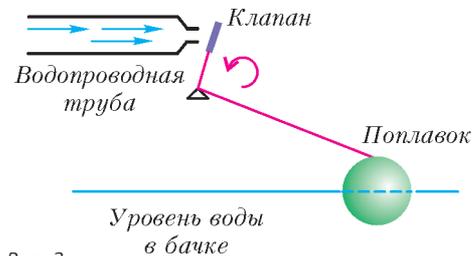


Рис. 2

тем, что давление воды в сети не маленькое. Чтобы его ощутить, попробуйте, например, чуть приоткрыть кран с холодной водой и затем остановить воду ладонью. Наверняка можно сказать, что сделать вам это не удастся. На практике плечо поплавка имеет длину 20–25 см, а длина меньшего плеча, на котором укреплен клапан, примерно 1 см. Рычаг изготавливают из бронзы, которая не поддается коррозии и не ржавеет. Вода втекает в бачок из сопла – так называют сужение трубы; его диаметр всего 2–3 мм.

Мы описали принципиальную схему автоматического регулятора, используемого в сливном бачке. Подобные механизмы реально использовались много лет во многих миллионах изготавливаемых из чугуна сливных бачков. Однако новое время – новые материалы. Дорогой чугун заменили керамикой, металлические детали – пластмассовыми, оцинкованные трубы – металлопластиковыми. Важной задачей во всех производствах стало снижение материалоемкости. Стремление к миниатюризации охватило и сантехнику. Существует крылатое выражение – нет ничего практичнее хорошей теории. Оказывается, наблюдаемый нами в настоящее время прогресс в производстве сливных бачков основан на одном из фундаментальнейших законов физики – на законе Паскаля.

Закон Паскаля звучит так: давление на поверхность жидкости, производимое внешними силами, передается жидкостью одинаково во всех направлениях. Этот закон распределения давления в жидкости установил в 1653 году французский математик, физик и философ Блез Паскаль (1623–1662). Опубликован он был в 1663 году в «Трактате о равновесии жидкостей». Полное название работы Паскаля таково: «Трактаты о равновесии жидкостей и весе массы воздуха, содержащие объяснение причин различных явлений природы, которые до сих пор не были достаточно известны и, в частности, тех, которые приписывают боязни пустоты». В этом трактате читаем: «Если сосуд, наполненный водой и закрытый со всех сторон, имеет два отверстия, одно в 100 раз больше другого, которые прикрыты точно подогнанными к ним поршнями, то один человек, надавливающий на малый поршень, уравнивает силу 100 человек, надавливающих на поршень в 100 раз больший, и преодолет силу 99. И каково бы ни было отношение этих отверстий, всегда, когда силы, приложенные к поршням, относятся друг к другу, как отверстия, силы эти будут в равновесии. ...Отсюда следует, что сосуд, наполненный водою, является новым принципом механики и новой машиной для увеличения сил в желаемой степени, потому что при помощи этого средства человек может поднять любую предложенную ему тяжесть». Совершенно ясно, что в этих словах полностью

сформулирована идея гидравлического подъемника, гидравлического пресса, гидравлического привода тормозов современного автомобиля и многих других подобных гидростатических устройств.

Приведем также несколько строк из статьи А.Штейнберга «Еще раз о законе Паскаля», опубликованной в «Кванте» №2 за 1990 год: «Рассказывая о научных достижениях Блеза Паскаля, невозможно не сказать хотя бы несколько слов об этой экстраординарной личности. В 16 лет он приобретает европейскую известность своей первой математической работой – трактатом о конических сечениях. И вообще период жизни с 12(!) до 23 лет безраздельно отдан математике, и Паскаль становится одним из признанных лидеров в этой области. Лишь после этого, вдохновленный работами итальянца Эванджеллиста Торричелли, Паскаль начинает заниматься физикой. И снова – достижения мирового уровня. В 1651 году Паскаль резко обрывает научные занятия и со свойственной ему страстностью погружается в водоворот светской жизни. Еще через три года, испытав мистическое озарение, он внезапно обращается к религии. Ей и литературным занятиям посвящается остаток жизни. В свой «физический» период Паскаль прославился остроумными опытами по гидростатике. Он в это время жил в Руане, и толпа в несколько сот горожан собиралась на его демонстрации как на праздничные представления. Вот один из самых известных опытов Паскаля, поразивший воображение жителей Руана. В тонкую длинную трубку, вставленную в закупоренную наполненную водой бочку, наливалась вода. Уровень воды в трубке повышался, и в какой-то момент крепко сколоченная бочка разрывалась. Объяснить этот «фокус» вы теперь должны без труда».

Вернемся однако к сливному бачку и его функционированию. Из вышесказанного следует, что если уменьшить диаметр трубы, подводящей воду в бачок, то можно уменьшить длину рычага и тем самым уменьшить размеры всей конструкции. Но при этом уменьшится скорость поступления воды в бачок, точнее – уменьшится объем воды, поступающей в бачок за единицу времени. По этой причине полное наполнение бачка потребует большего времени, и время цикла увеличится. Это, ясное дело, нежелательно, а иногда и просто недопустимо. Как быть? Оказывается, решение этой технической задачи существует. И оно сродни тому, как барон Мюнхгаузен сам себя вытащил из болота за волосы. Действительно, можно «заставить» воду, поступающую в бачок, саму себя перекрывать (обратная связь!).

Рассмотрим сосуд, о котором мы прочитали в выдержке из «Трактата» Паскаля и который на рисунке 3 обозначен буквой *K* (техническое его название – камера). Посредством

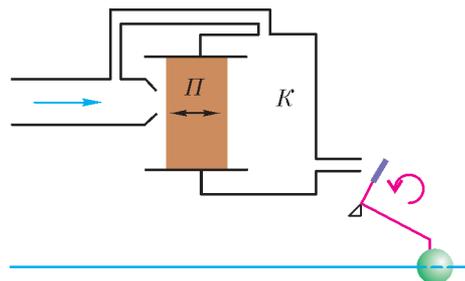


Рис. 3

тоненькой трубочки через маленькое отверстие в верхней части сосуда в него поступает вода из водопроводной сети высокого давления. Пусть поршень *P*, прикрывающий второе отверстие в этом сосуде, по площади больше (для определенности – больше в два раза) площади сечения

трубы, по которой вода поступает в бачок. Если в сосуде никаких других отверстий нет, то к поршню, прикрывающему второе отверстие в сосуде, будет приложена очень большая сила. Расположим этот сосуд так, чтобы поршень при своем движении из камеры наружу закрывал трубу, по которой вода поступает в бачок. Тогда получается, что поршень к трубе толкает сила, которая больше (в два раза) силы, отталкивающей поршень от трубы. Ясно, что в результате поршень закроет трубу, и поступление воды в бачок прекратится.

А как же сделать, чтобы вода смогла поступать в бачок, когда он опустеет? Для этого в камере делают третье отверстие, по диаметру равное первому, маленькому (на рисунке 3 оно изображено в правой стенке камеры, внизу). Через это отверстие вода из камеры льется в бачок. И вот это-то отверстие и снабжают тем элементарным клапаном-рычагом, о котором говорилось раньше. Поскольку теперь приходится перекрывать очень маленькое отверстие, то и размеры этого вспомогательного клапана-рычага могут быть малыми.

Когда бачок пуст, маленькое отверстие открыто. Вода втекает в камеру и вытекает из нее. В камере нет никакого избыточного давления, большой поршень не препятствует поступлению воды из трубы в бачок. По мере наполнения бачка водой поплавок поднимается вверх и перекрывает отток воды из камеры. Давление в камере становится равным давлению в сети, это давление перемещает большой поршень *P* к водопроводной трубе, поршень запирает трубу, и поступление воды в бачок прекращается. Если теперь бачок опустошить, то поплавок опустится вниз, давление в камере станет равным атмосферному, и вода из сети сместит большой поршень внутрь камеры. Бачок начнет наполняться водой.

Таково принципиальное устройство современных сливных бачков. Научное название подобных устройств – регулятор непрямого действия с гидроусилением. Современные технологии позволяют при этом использовать дешевые, легкие и удобные в монтаже пластмассовые детали (можно обойтись даже без гаечного ключа), а в качестве поршня выступает обычно резиновая мембрана. На фотографии на рисунке 4



Рис. 4

представлен один из вариантов такого модернизированного клапана в разобранном виде. Здесь диаметр сопла, через которое вода поступает в бачок, равен 5 мм. Сопло перекрывается резиновой мембраной, играющей роль подвижного поршня, диаметр мембраны 2 см. Камера имеет цилиндрическую форму, ее диаметр 2 см, толщина 1–2 мм. Через одно отверстие в резиновой мембране вода попадает в камеру, через другое отверстие вода из камеры льется в бачок. Эти два отверстия по размеру сравнимы с размером игольного ушка. Ясно, что перекрыть воду, поступающую из камеры в бачок через такое малое отверстие, легко – для этого используется рычаг с большим плечом длиной всего 4–5 см.

Вот теперь наши читатели, знающие принципиальное устройство сливного регулятора, могут в качестве физико-технической задачи предложить своим друзьям объяснить принцип его работы. Поскольку два отверстия – вход и выход из камеры K – практически незаметны, способ функционирования может оказаться непростой и поучительной загадкой. Как говорится, и стар и млад могут поломать над ней голову. Не каждый, имея в руках этот клапан, сразу скажет, как, куда и для чего течет в нем вода... Собственно говоря, жизненная необходимость заменить такой клапан и явилась поводом для появления этого рассказа. В наше время вышедшие из строя отдельные элементы, крупные блоки и даже целые устройства обычно не ремонтируют – проще, быстрее и дешевле заменить их целиком новыми. Тем не менее, мы полагаем, что ответ на вопрос – как устроен клапан? – интересен нашим читателям. Ведь в будущем нашей стране будут нужны не только работники отверточных производств (когда что-то собирают из готовых деталей), но и творцы – создатели нового.

Перефразируя слова Маяковского, можно, пожалуй, сказать, что в наше время закон Паскаля, открытый три с половиной столетия тому назад, проявляет себя и в разнообразных мощных многотонных машинах, и в миниатюрных конструкциях

«...весомо,
грубо,
зримо,
как в наши дни
вошел водопровод,
сработанный
еще рабами Рима».

Ясное дело, что описанные здесь и представленные на рисунках регуляторы непрямого действия с гидроусилением создавались изначально отнюдь не для сливных бачков. Их предназначение было намного более серьезным! Но это – как принято говорить – уже совсем другая история.

Столкновения, рассеяние и небесные знамения

А. СТАСЕНКО

В эпоху войн и мятежей «видения» и «небесные знамения» всегда пристально фиксируются и наблюдаются современниками. Спустя пять лет после избрания Михаила Романа в Европе началась Тридцатилетняя война. Явилась и комета, которая, по общему мнению, эту войну предвещала. Видения и пророчества заполнили и католические, и протестантские страны. Им верили короли, полководцы и монахи, безграмотные простолюдины и просвещенные мужи.

История русской литературы X–XVII веков

РОВНО СТО ЛЕТ ТОМУ НАЗАД АНГЛИЙСКИЙ ФИЗИК ЭРНЕСТ Резерфорд объявил потрясенному миру: атом – пустой, в его центре находится массивное ядро с размером в десять тысяч раз меньше размера самого атома; вокруг ядра вращаются легкие электроны. Все это было очень похоже на Солнечную систему, поэтому модель атома Резерфорда была названа планетарной моделью. Она явилась фундаментальным прорывом в понимании строения вещества.

Однако начнем с самого простого – со столкновения двух абсолютно упругих шариков. Их «абсолютная упругость» означает полное отсутствие потерь механической энергии. Пусть шарики летят навстречу друг другу с одинаковыми (по модулю) скоростями, но с не равным нулю прицельным расстоянием h . На рисунке 1, *a* они изображены за мгновение до столкновения. Но если шарики совершенно одинаковы (и по массе, и по размеру) и их скорости тоже одинаковы (в «лабораторной» системе координат, связанной с неподвижным листом бумаги, на котором изображен рисунок), то их

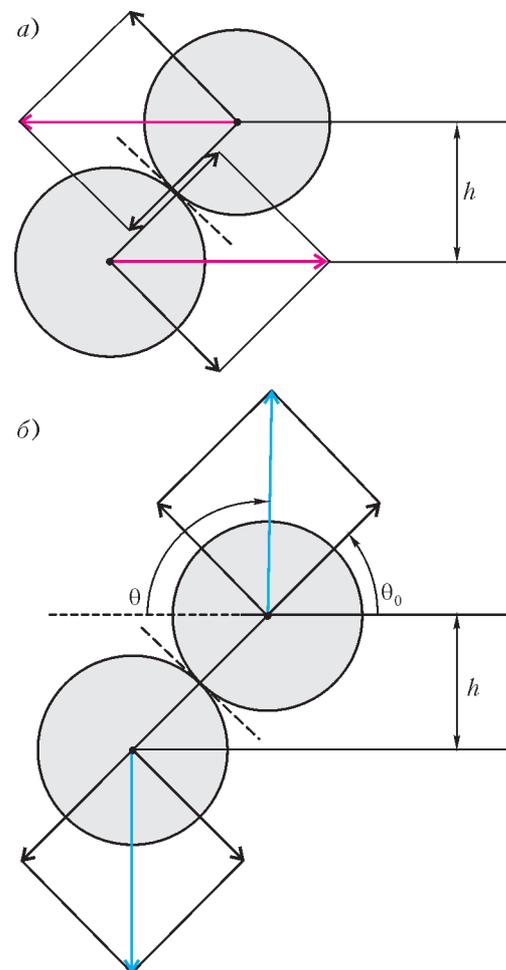


Рис. 1

центр масс неподвижен (в этой системе координат). Разложим скорость каждого шарика на две составляющие – вдоль линии их центров и вдоль касательной к поверхностям обоих шариков в точке соприкосновения (штриховая линия). Ясно, что через мгновение после упругого столкновения радиальные составляющие скоростей обоих шариков изменятся на противоположные, а касательные останутся прежними (рис.1,б). Результат столкновения полностью аналогичен

случаю, при котором каждый шарик зеркально отражается от тяжелой плиты, поверхность которой изображена штриховой линией. Складывая снова обе составляющие скорости каждого шарика, видим, что первоначальный вектор каждой скорости повернулся на угол

$$\theta = \pi - 2\theta_0 = \pi - 2 \arcsin \frac{h}{2R}, \quad (1)$$

где R – радиус шариков. (Физики говорят, что произошло рассеяние шариков друг на друге.)

Полученная зависимость качественно показана на рисунке 2 (читатель при желании может точно рассчитать эту кривую). Видно, например, что если прицельное расстояние равно нулю ($h = 0$), то происходит лобовое столкновение (так называемое центральное соударение) и шарики разлетаются строго «назад», т.е. $\theta = \pi$. А при $h = 2R$ они, едва коснувшись друг друга, летят в прежнем направлении, т.е. $\theta = 0$.

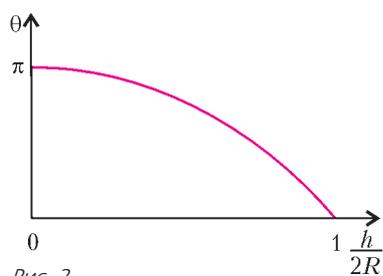


Рис. 2

В рассмотренном случае предполагалось, что шарики взаимодействуют только в момент соприкосновения. Однако в реальности тела «чувствуют» друг друга и при любом удалении. Конечно, речь идет прежде всего об электростатическом (кулоновском) и гравитационном (ньютоновском) взаимодействиях. Как известно, в обоих случаях силы взаимодействия изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния между то-

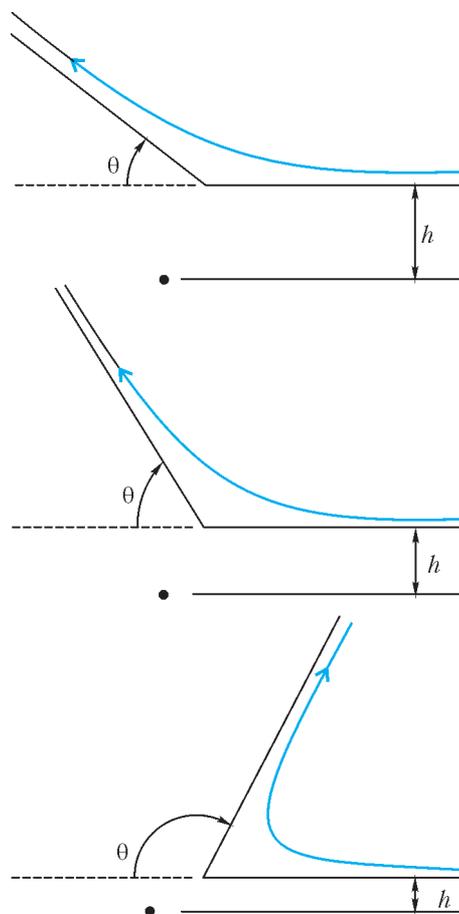


Рис. 3

чечными объектами (размеры которых много меньше этого самого расстояния). Только при кулоновском взаимодействии возможно как притяжение (разные знаки зарядов тел), так и отталкивание (одинаковые знаки), а при гравитационном – только притяжение.

И вот, сотню лет назад Резерфорд, а затем Гейгер, Марсден и Чадвик стали «обстреливать» α -частицами (ядрами гелия), вылетающими из радиоактивного источника, листки тонкой фольги из разных тяжелых металлов (золота, платины, серебра, меди). Рассеивающее ядро металла намного массивнее α -частицы, к тому же оно «вморожено» в кристаллическую решетку. Было установлено, что большинство α -частиц проходят через фольгу почти без отклонений, но встречались редкие случаи их отброса «почти назад» ($\theta \approx \pi$). Это было похоже на лобовое столкновение α -частицы с ядром, соответствующее нулевому прицельному расстоянию. Результаты экспериментов говорили о том, что заряды α -частиц и ядер имеют одинаковые знаки и что ядра очень маленькие. Исходя из планетарной модели атома, Резерфорд построил картину рассеяния α -частиц на ядрах металлов. На рисунке 3 изображены траектории α -частицы для трех значений прицельного расстояния h (черная точка – это массивное ядро). Записав привычные для механики законы сохранения энергии и момента импульса (взаимодействие упругое), можно получить выражение для угла θ (в системе единиц СГС):

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{mv_{\infty}^2 h}{2Ze^2},$$

где $2e$ и Ze – заряды α -частицы и рассеивающего ядра, m – масса α -частицы, v_{∞} – ее скорость «на бесконечности», e – элементарный заряд.

Планетарная модель атома оказалась весьма плодотворной, а фундаментальные опыты описаны во многих книгах. В частности, в классической монографии Арнольда Зоммерфельда «Строение атома и спектры» α -частицы рассматриваются как ...кометы в поле тяготения Солнца!

А как устроены кометы? Твердое ядро (рис.4) обычно имеет радиус $r_{\text{я}}$ менее 10 км (в большинстве случаев даже

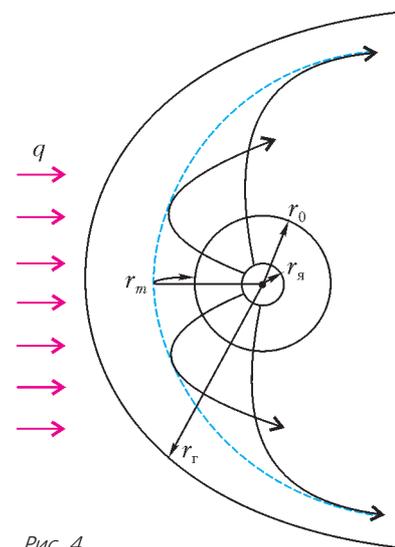


Рис. 4

менее 1 км), и его удавалось заметить с Земли только в очень сильные телескопы. Когда комета приближается к Солнцу (т.е. в перигелии ее орбиты), солнечное излучение нагревает ядро, что приводит к испарению его материала с образованием газообразной головы и хвоста, которые уже легко наблюдаемы. За один «проход» теряется всего около 1% вещества

кометы, так что ее массу можно считать почти постоянной. Тем более что она может пополняться путем захвата кометой новых порций массы на «холодных» участках сильно вытянутой орбиты кометы.

Согласно одной из моделей, комета состоит из смеси замороженных углеводородов и микрочастиц метеоритной пыли, когда-то слившихся друг с другом под действием гравитации. С приближением к Солнцу до расстояния приблизительно $(2-4) \cdot 10^5$ км происходит нагревание этого рыхлого пористого тела, что и приводит к испарению его материала и выбросу микрочастиц, которые ускоряются испаряющимся газом. А поскольку ядро кометы вращается, это испарение и вынос микрочастиц можно считать сферически симметричными. Радиальная скорость газов для известной кометы Галлея была оценена в $0,5$ км/с, а температура поверхности – в $150-250$ К.

Вообще говоря, кометы бывают разных типов, и поведение любой из них может быть весьма прихотливым. Поэтому здесь изображен лишь некоторый осредненный портрет кометы.

Видимый диаметр головы кометы составляет $r_g \sim 10^5 - 10^6$ км, что на много порядков больше ее ядра. В этой области происходит радиальный разлет газа и ускоренных им микрочастиц, причем из-за быстрого расширения газа (концентрация которого $n \sim 1/r^2$) длина свободного пробега его молекул резко растет ($\sim r^2$), так что они перестают сталкиваться друг с другом и с микрочастицами. В результате радиус r_0 поверхности, на которой микрочастицы достигают предельной скорости, ограничен приблизительно десятком радиусов самого ядра ($10-100$ км). И микрочастицы продолжали бы лететь в радиальном направлении, если бы не поток квантов солнечного излучения (и, конечно, корпускул солнечного ветра).

Попробуем описать движение микрочастиц, эмитируемых кометой, в поле солнечного излучения. Как известно, каждый из фотонов обладает энергией $h\nu$ и импульсом $h\nu/c$ (h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме, ν – частота). Предположим, что все фотоны, падающие на диаметрально сечение шаровой микрочастицы площадью πa^2 , поглощаются частицей. Тогда, если плотность потока излучения (сумма фотонов всех частот) составляет q [Вт/м²], сила, действующая на частицу (или поток импульса всех поглощенных ею фотонов), равна $q \frac{\pi a^2}{c}$. Значит, уравнение динамики микрочастицы (второй закон Ньютона) будет иметь вид

$$m \langle g \rangle = q \frac{\pi a^2}{c}.$$

Поскольку масса микрочастицы равна $m = \frac{4}{3} \pi \rho^0 a^3$, где ρ^0 – плотность материала частицы, искомое ускорение равно

$$\langle g \rangle = \frac{3}{4} \frac{q}{\rho^0 a c}.$$

Если комета находится от Солнца на расстоянии, равном среднему радиусу орбиты Земли, т.е. одной астрономической единице (1 а.е. = 150 млн км = $1,5 \cdot 10^8$ км), то $q = 1400$ Вт/м². Тогда для ускорения микрочастицы радиусом $a = 1$ мкм = 10^{-6} м и плотностью $\rho^0 = 10^3$ кг/м³ в поле солнечного излучения получим оценку

$$\langle g \rangle = \frac{3 \cdot 1400}{4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ м/с}^2 \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

Пусть все микрочастицы, ускоренные потоком газов вблизи ядра кометы, получают одинаковую радиальную скорость $v_0 = 100$ м/с (порядка, но меньше тепловой скорости молекул). Если считать, что за время существенного искривления траектории микрочастицы (под действием фотонов Солнца) ускорение $\langle g \rangle$ изменяется незначительно, то задача сводится к нахождению траекторий точечных масс в поле с постоянным ускорением «тяготения». Значит, в этом приближении все траектории будут параболами. Та микрочастица, которая вылетела строго навстречу потоку излучения, до остановки и поворота назад пройдет расстояние

$$r_m = \frac{v_0^2}{2 \langle g \rangle} = \frac{10^4}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \text{ м} \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ м} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Соответствующее время будет равно

$$t_m = \frac{v_0}{\langle g \rangle} = \frac{10^2}{3 \cdot 10^{-3}} \text{ с} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 10 \text{ ч}.$$

За это время ядро кометы пролетит расстояние, много меньшее 1 а.е., что и оправдывает наше предположение о постоянстве $\langle g \rangle$, а заодно и о почти постоянном значении скорости самого ядра кометы в поле тяготения Солнца. (Последнее замечание позволяет считать инерциальной систему координат, связанную с ядром кометы, относительно которой и проведено рассмотрение траекторий микрочастиц.)

Полученная оценка r_m показывает, что все траектории микрочастиц будут лежать глубоко внутри головы кометы (видимой в основном благодаря рассеянию света на ее молекулах). А искривление траекторий микрочастиц вполне можно назвать их рассеянием на солнечном свете. Ситуация похожа на то, как если бы артиллерист стал стрелять во всех направлениях под всеми углами. Он получил бы множество параболических траекторий (естественно, без учета сопротивления воздуха), «накрытых» сверху поверхностью, касательной к этим траекториям, – так называемой огибающей поверхностью (рис.5).

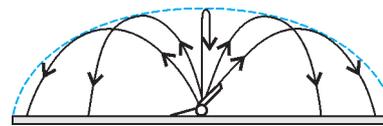


Рис. 5

Но неужели сама комета безразлична к покидающим ее частицам? Вспомним, что для каждого гравитирующего тела радиусом R и массой M существует так называемая скорость убегания, или вторая космическая скорость, равная

$$v_2 = \sqrt{2g_R R},$$

где $g_R = GM/R^2$ – ускорение свободного падения у его поверхности. В нашем случае с кометой

$$g_R = G \cdot \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{я}} r_{\text{я}}.$$

Здесь мы уже приготовились подставить плотность ядра кометы $\rho_{\text{я}} \approx 10^3$ кг/м³ и его радиус $r_{\text{я}} \approx 10^3$ м. Тогда получается

$$g_R \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2 \text{ и } v_2 \approx 0,75 \text{ м/с}.$$

Для Земли значения этих параметров равны $9,8$ м/с² и $11,2$ км/с соответственно.

Сравним еще полученное ускорение с другим – с ускорением w , которое поток несущего газа сообщает частице радиусом a и массой m . Как известно, оно пропорционально произведению площади поперечного сечения частицы πa^2 , плотности газа $m_r n$ и квадрата скорости u обтекания частицы газом:

$$w \approx \frac{\pi a^2 m_r n u^2}{m} \approx \frac{3 m_r n u^2}{4 \rho^0 a}$$

Здесь $m_r = N_r m_p$ – масса молекулы газа, $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг – масса нуклона, N_r – число нуклонов в молекуле газа. (Из последнего соотношения видно, в частности, что чем меньше частица, тем больше ее ускорение – ведь с уменьшением линейного размера объем и масса падают быстрее, чем площадь поперечного сечения.) Для «стандартных» молекул, истекающих из ядра кометы – циана CN и угарного газа CO, – число нуклонов равно 26 и 28 соответственно. Примем $N_r \approx 30$. Тогда для микронной частицы с радиусом $a \sim 10^{-6}$ м и начальной скоростью газа на поверхности кометы (приобретающей скорость звука на выходе из ее многочисленных пор) $u = u_R \sim 200$ м/с при концентрации молекул у поверхности ядра $n \approx 10^{12} - 10^{14}$ см⁻³ (по астрономическим данным) получим $w \approx 0,5 - 50$ м/с². С

удалением от ядра и сила притяжения, и концентрация молекул несущего газа быстро падают (обратно пропорционально квадрату расстояния от центра ядра). Полученные оценки подтверждают, что расширяющийся газ действительно может придать захваченным частицам большую скорость за короткое время на небольшом расстоянии от поверхности ядра, после чего они в течение гораздо более продолжительного времени подвергаются воздействию только солнечного излучения.

Конечно, все это лишь приблизительные оценки. С одной стороны, сечение рассеяния света шаровой частицей может превосходить геометрическое сечение πa^2 . С другой стороны, не обязательно весь поток энергии, проходящий через это сечение, поглотится частицей – часть энергии рассеется и добавится к тому молекулярному рассеянию солнечного света, благодаря которому комета и кажется громадным «видимым ничто» (по выражению французского физика Жака Бабине), ибо сквозь ее голову (а тем более сквозь хвост) просвечивают даже слабые звезды. А еще Солнце испускает и элементарные частицы (корпускулярный ветер), которые тоже рассеиваются на потоках вещества, испускаемых кометами.

Итак, всюду столкновения, взаимодействия, рассеяние...

Как рисовать по небу?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

разности цвет свечения смещается в красную сторону, а при увеличении – в синюю.

Как правило, в атоме есть не один, а несколько электронов, и каждый из них при «нагреве» перескакивает на свою орбиту и потом возвращается обратно. В результате атомы нагретой металлической пудры светятся сразу несколькими цветами, образуя, таким образом, спектр излучения. На рисунке 2 показаны спектры излучения нескольких металлов. Видно, что наиболее яркая линия в спектре натрия – желтая с длиной волны 590 нм, а в спектре лития – розовая с длиной волны 670 нм. В спектре меди большинство линий

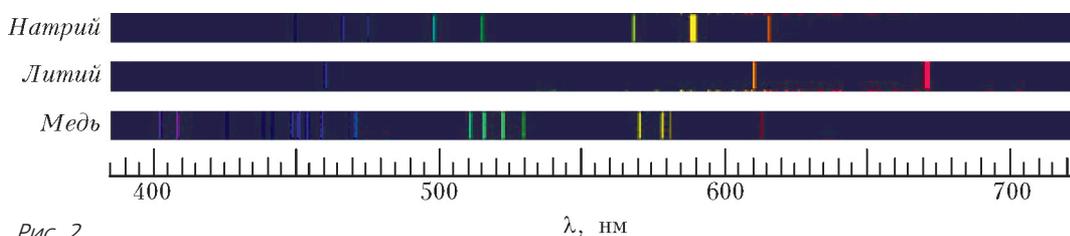


Рис. 2

находятся в сине-зеленой части спектра, что придает пламени цвет морской волны.

Чтобы заставить атомы пиротехнического изделия светиться, их надо «нагреть». Мы привыкли нагревать предметы, помещая их в место горения топлива, например в костер, где горят дрова. При этом кислород, необходимый для горения, берется из атмосферы, и костер разгорается довольно медленно – сначала сгорают внешние слои поленьев, соприкасающиеся с атмосферой, а потом и внутренние. Очевидно, что фейерверк, потребляющий кислород только из атмосферы, будет разгораться очень медленно. Поэтому любое пиротехническое изделие берет кислород с

собой – он, а также тепловая энергия выделяются при химической реакции разложения вещества, молекула которого содержит атомы кислорода. Часто в качестве такого кислородосодержащего вещества используют популярное азотное удобрение – калиевую селитру KNO_3 (нитрат калия), которая при нагревании выше $600^\circ C$ разлагается с выделением кислорода:



Таким образом, две молекулы нитрата калия при нагреве дают одну молекулу кислорода O_2 и количество теплоты Q , достаточное для того, чтобы вызвать аналогичные химические реакции в соседних молекулах селитры. В результате происходит быстрое образование большого количества кислорода, и если молекулы селитры окружены каким-либо

горючим веществом, то это вещество начинает гореть с выделением большого количества теплоты. В качестве горючего вещества можно использовать, например, серу и древесный уголь. Эта смесь селитры, серы и древесного угля и является порохом.

Каждая из звездочек фейерверка – это небольшой, размером с горошину или вишню, шарик, сделанный из смеси пороха, металлической пудры и клейкого вещества, например глины. Эти шарики, которые иногда называют «звездками», с помощью специального порохового заряда доставляют на высоту нескольких десятков метров и там взрываются. Взрыв разбрасывает «звездки» во все стороны, и они начинают сгорать, образуя светящиеся шары самых разных цветов и размеров – то, что мы и называем собственно фейерверком.

К. Богданов

И снова задачи на сопротивления

Е. СОКОЛОВ

ПРОШЛА ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, И НА ОЧЕРЕДНОЕ заседание физического кружка ребята пришли невеселыми.

– Что стряслось? – поинтересовался я.

– Да снова на олимпиаде дали ваши любимые задачи на сопротивления. Причем на три параллели, для восьмого, девятого и десятого классов, дали вообще одну задачу. Вот ее условие:

Задача. В новогоднюю ночь пришел к восьмикласснику Пете Дед Мороз с подарками. Обрадовался Петя, подбежал к нему, а тот протягивает ему листок с электрической схемой,

состоящей из восьми белых сопротивлений по 1 Ом каждое, двух серых сопротивлений по 2 Ом и двух черных сопротивлений по 3 Ом (рис.1).

– Ой, а мы такие схемы в школе не решали, – огорчился Петя.

– Да мне не нужен точный ответ, – отвечает Дед Мороз. – Укажи просто интервал, в котором лежит значение общего сопротивления цепи, и ты здорово поможешь мне.

Подумал-подумал Петя и ответил на вопрос Деда Мороза. И получил много-много подарков.

Решите и вы, ребята, эту задачу. Только имейте в виду, что если вы укажете интервал шириной 2 Ом (например, $200 \text{ Ом} \leq R_{\text{общ}} \leq 202 \text{ Ом}$), то получите за решение один балл, если вы укажете интервал шириной 1 Ом, то получи-

те два балла, а если вам удастся получить интервал меньше чем 0,01 Ом, то жюри поставит вам максимальный балл.

– Вот такая непривычная задача. Мы уже выяснили, что известными олимпиадными методами подсчитать сопротивление этой цепи не удастся – ни метод склейки узлов, ни метод удаления здесь не работают, как будто специально так подобрали. А прямой расчет методами электротехники слишком громоздкий. Оказалось, что только один из семидесяти участников смог дойти до конца, да и то сделал ошибку под самый конец. Плохая задача!

– Ну, здесь я с вами не согласен. На мой взгляд, задача просто золотая. Правда, я, как автор этой задачи, могу и ошибаться. Но ничего страшного, давайте спорить.

– ...?

– Во-первых, почему вы решили, что надо вычислять точное значение сопротивления этой цепи? Ведь в условии прямо сказано, что искать его не обязательно, достаточно просто указать интервал, в котором лежит это значение. Так что вот вам первый толк от нашей задачи: она показала, насколько сильной бывает инерция мышления – семьдесят олимпиадников, как один, пошли привычной, но неправильной дорогой, вместо того чтобы остановиться и просто подумать.

А заработать баллы в этой задаче очень просто. Смотрите: если я перережу все боковые проводки так, чтобы остались только два центральных сопротивления (рис.2), то что произойдет с сопротивлением цепи?

– Так, ток в цепи, конечно, уменьшится, значит, сопротивление цепи возрастет.

– И станет равным 2 Ом. Поэтому вот вам уже один балл:

$$0 < R_{\text{общ}} < 2 \text{ Ом} .$$

Вы же не будете спорить, что сопротивление всегда больше нуля?

– И правда, все очень просто! Однако здесь и два балла заработать можно в одно действие – просто отрезаем лишь серые и черные сопротивления. Общее сопротивление цепи при этом возрастет, а в нашем распоряжении останется простая схема (рис.3), сопротивление которой равно 6/7 Ом. Ура, мы получили неравенство на два балла:

$$0 < R_{\text{общ}} \leq \frac{6}{7} \text{ Ом} .$$

– Все правильно. Идею вы поняли, переходим к обоснованию общего метода.

В этой задаче предполагается, что вместо стандартного метода – перехода от одной эквивалентной схемы к другой – решающим будет переходит к неэквивалентным схемам, т.е. к схемам, у которых сопротивление больше или меньше, чем у исходной. Разумеется, такие переходы имеют смысл только тогда, когда мы точно знаем, увеличится или уменьшится при переходе общее сопротивление цепи. Поэтому при решении обязательно следует использовать следующие общие принципы¹:

1) если какое-либо сопротивление в цепи увеличить, то общее

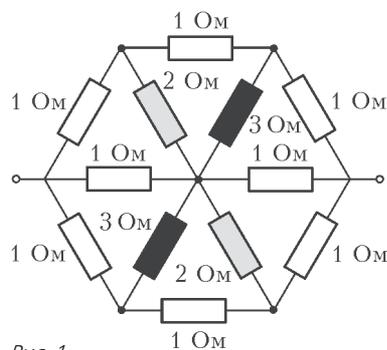


Рис. 1

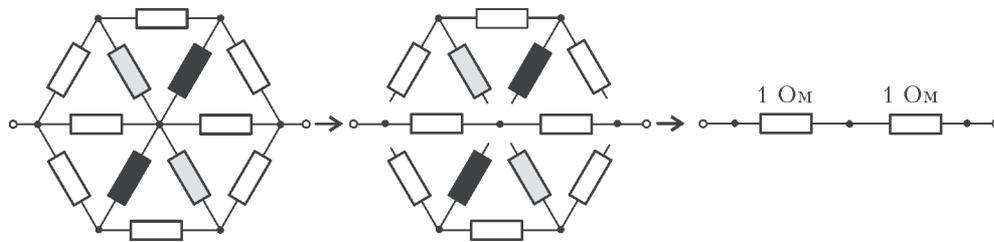


Рис. 2

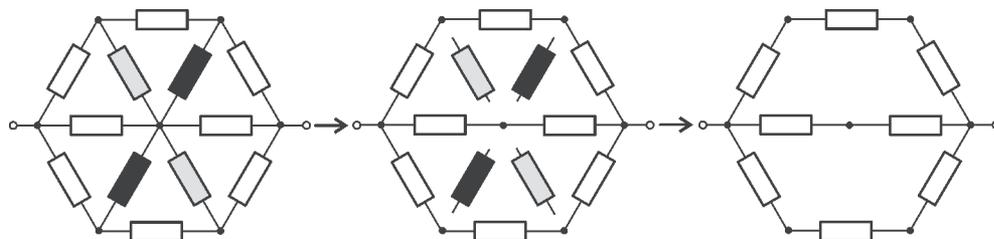


Рис. 3

¹ Доказательство этих принципов можно найти, например, в статье О.Ляшко «Почему не уменьшится сопротивление» («Квант» №1 за 1985 г.).

сопротивление цепи тоже увеличится (или останется прежним, если по изменяемому сопротивлению не шел ток);

2) если какое-либо сопротивление в цепи уменьшить, то общее сопротивление цепи тоже уменьшится (или останется прежним, если по изменяемому сопротивлению не шел ток).

Особо эффектными бывают самые радикальные изменения. Когда, например, мы сразу увеличиваем сопротивление некоторого резистора до бесконечности. На обычном языке это означает, что мы просто вырезаем его из схемы. Именно так мы и поступили, когда получили два первых неравенства. А иногда бывает полезным поступить наоборот – уменьшить сопротивление резистора до нуля, т.е. заменить его идеальным проводником.

Упражнение 1. Как изменится общее сопротивление цепи, если: а) перерезать какой-нибудь проводок в цепи; б) впаять в цепь дополнительный идеальный проводник (соединить две точки схемы идеальным проводником)?

– А можно вопрос? Когда мы перерезали проводки в двух первых случаях, то всем нам, конечно, было очевидно, что сопротивление цепи при этом возрастает. А вот для общего случая сформулированные принципы, хотя и кажутся правдоподобными, но не являются совсем очевидными.

– Вопрос правильный. Поэтому даю объяснения.

Во-первых, я считаю, что здесь должно сработать то, что называется смекалкой, и на что обычно нацеливаются олимпиадные задачи. А во-вторых, настоящий будущий инженер или ученый должен интересоваться на уроках не только тем, как решить задачу, но и общими вопросами. Например: существует ли метод, с помощью которого можно рассчитать сопротивление цепи?² Или: как изменится общее сопротивление цепи при изменении величин отдельных сопротивлений?

Теперь давайте продолжим наши исследования и попробуем все-таки получить максимальный балл за эту задачу. Только не забывайте, что в мире неэквивалентных схем движение идет только в одну сторону. Нет никакого смысла на первом шаге перерезать один проводок, а на втором – впаять другой. Ведь совершенно не понятно, как изменится общее сопротивление цепи в результате таких двух противоположных действий.

И еще, чтобы вы сразу видели, какое именно направление движения выбрано, мы решили изменять цвет рисунков. Схемы с сопротивлением большим, чем у исходной, мы будем изображать красным цветом, а схемы с сопротивлением меньшим, чем у исходной, – синим цветом.

Итак, жду идей.

– А идею здесь сразу видно! Смотрите, если бы серые и черные сопротивления были одинаковыми, то мы легко могли бы рассчитать схему, расщепив, например, средний узел. Поэтому давайте один раз увеличим сопротивление

² О методе, с помощью которого можно рассчитать сопротивление любой цепи, рассказано, например, в статье «О простом и сложном» («Квант» №2 за 2002 г.).

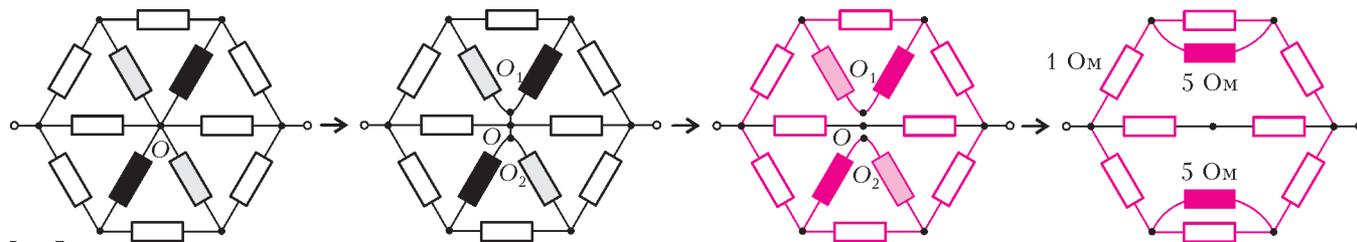


Рис. 5

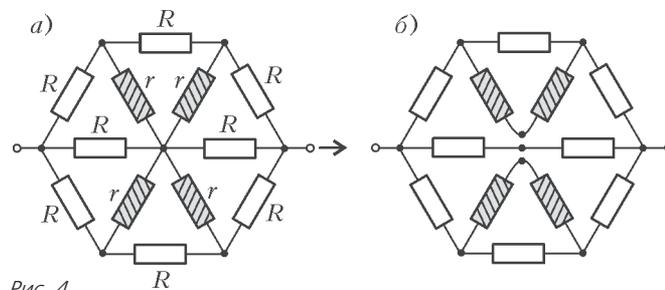


Рис. 4

серых резисторов до 3 Ом, а другой раз уменьшим сопротивление черных резисторов до 2 Ом. В первом случае мы получим оценку сверху, а во втором – оценку снизу. А чтобы не считать два раза, найдем сопротивление схемы в самом общем виде, полагая, что номиналы четырех заштрихованных на рисунке 4 сопротивлений одинаковы и равны r , а восьми белых сопротивлений равны R :

$$R_{\text{общ}} = \frac{2R(R + 3r)}{3R + 7r}.$$

Упражнение 2. Покажите это.

Подставляя в формулу для $R_{\text{общ}}$ первый раз $r = 3$ Ом, а второй раз $r = 2$ Ом ($R = 1$ Ом в обоих случаях), получаем

$$\frac{14}{17} \text{ Ом} \leq R_{\text{общ}} \leq \frac{5}{6} \text{ Ом}.$$

Ширина диапазона равна

$$\Delta R_{\text{общ}} = \frac{5}{6} \text{ Ом} - \frac{14}{17} \text{ Ом} = \frac{1}{102} \text{ Ом} < 0,01 \text{ Ом}.$$

Вполне достаточно для получения максимального балла.

– Интересно, что если серые и черные сопротивления сделать одинаковыми и равными их среднему арифметическому значению 2,5 Ом, то наша схема тоже превратится в схему, изображенную на рисунке 4, и мы сможем подсчитать ее сопротивление, просто подставив в готовую формулу значение $r = 2,5$ Ом:

$$R_{\text{общ}} = \frac{34}{41} \text{ Ом}.$$

Правда, не очень понятно, что это такое: то ли оценка сверху, то ли оценка снизу, то ли само сопротивление.

– Да, толку от полученного числа пока никакого нет. И произошло это потому, что мы нарушили правила одностроннего движения. Мы одновременно одни сопротивления (черные) уменьшили, а другие (серые) увеличили. И, конечно, сообразить теперь, что при этом произошло с общим сопротивлением цепи, совершенно невозможно. Но не расстраивайтесь, сейчас мы найдем применение полученному вами числу. Только будем выполнять все преобразования по правилам.

Прежде всего, расщепим центральную точку O на три точки (рис.5). А затем – внимание! – перережем проводки OO_1 и OO_2 . Что при этом произошло с общим сопротивлением цепи?

– Оно увеличилось.

– Да, мы перешли к неэквивалентной схеме с большим сопротивлением. Наша новая схема в точности эквивалентна схеме на рисунке 4,б со значениями заштрихованных сопротивлений, равными среднему арифметическому значению $r = 2,5$ Ом. Таким образом, уравнивание серых и черных сопротивлений приводит все-таки к увеличению сопротивления цепи.

– Значит, полученное нами число $34/41$ Ом есть оценка сверху?

– Да, и мы смело наносим его на карту наших исследований (рис.6). С учетом последнего достижения найденный

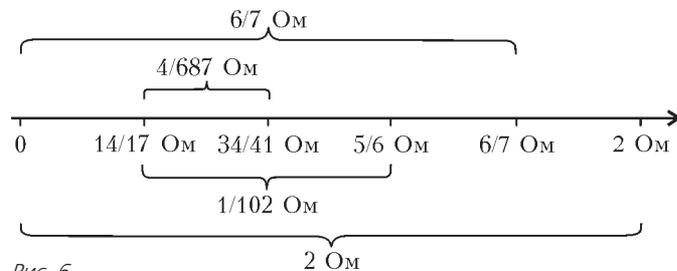


Рис. 6

нами интервал сжался уже до величины

$$\Delta R_{\text{общ}} = \frac{34}{41} \text{ Ом} - \frac{14}{17} \text{ Ом} = \frac{4}{687} \text{ Ом} < 0,006 \text{ Ом}.$$

Прогресс налицо.

– Плохо только то, что заранее не ясно, окажется новая оценка лучше или хуже старой и насколько серьезное она даст улучшение.

– Да, это так. И поэтому всегда поиски улучшающих оценок идут интуитивно, наугад. Но у меня есть для вас хорошая новость. Дед Мороз по секрету сообщил мне, что того, кто сможет сжать интервал до $0,001$ Ом, ждет специальный приз. И есть еще подсказка от меня: попробуйте улучшить нижнюю оценку, впаяв куда-нибудь полезные проводки.

– ...?

– Давайте рассуждать вместе. Берем левое центральное белое сопротивление и делим его на два сопротивления: x и $1-x$, то же самое проделываем и с правым центральным сопротивлением, только делим его части $1-y$ и y (рис.7). При этом у нас появляются на центральной линии две новые точки A и B . Давайте соединим их идеальными проводниками с точками A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно (рис.8,а). Что

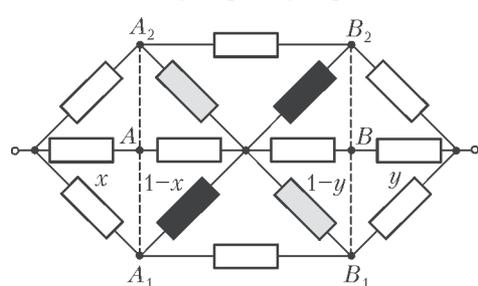


Рис. 7

при этом случится? – Давайте соединим их идеальными проводниками с точками A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно (на предыдущем шаге мы соединили их идеальными проводниками) и заменили пары параллельно включенных сопротивлений одним. А заодно подготовились к следующему прыжку в неизвестное – сгруппировали вместе части с x и y .

– А какие значения брать при расчетах для свободных параметров x и y ?

– Давайте подумаем. Какие бы значения для x и y мы ни брали, рассчитав сопротивление новой схемы, мы всегда

будем получать оценку снизу для общего сопротивления нашей исходной цепи. Только вот если мы хотим, чтобы наша оценка снизу была как можно лучше, желательно подобрать значения для этих величин такими, чтобы...

– Чтобы сопротивление новой схемы было как можно больше.

– Совершенно верно!

– Так что же нам теперь решать задачу на экстремум? Вычислять сопротивление схемы в общем виде, брать производные, приравнять их к нулю...?

– Можно поступить и так. Это – стандартный метод решения задач на максимальные и минимальные значения, и он всегда приведет к ответу, если, разумеется, хватит времени и сил. Но я предлагаю решить задачу методом размышлений.

– Согласны. Правда не верится, что такую сложную задачу можно решить без формул.

– Попробуем. Все внимание – на рисунок 9. Слева на нем изображена схема, представленная раньше на рисунке 8,б, с расщепленными точками K и L , а справа – некоторая новая схема. Есть между ними что-нибудь общее?

– Конечно, есть. Правая схема получается из левой, если перерезать проводки K_1K_2 и L_1L_2 .

– А теперь посмотрите на рисунок 10. Слева на нем изображена схема, представленная раньше на рисунке 9,б, в которой пары последовательно включенных сопротивлений мы заменили одним. А в центре и справа...

– В центре та же схема, что и слева, только с расщепленной точкой M . А справа – центральная схема с перерезанным проводком M_1M_2 .

– Ну, вот вам и ответ: если сопротивление $41/29$ Ом включено параллельно с сопротивлением 2 Ом, то их общее сопротивление будет равно

$$R_{\text{общ}} = \frac{82}{99} \text{ Ом}.$$

Это и есть наша новая оценка снизу общего сопротивления цепи. Она улучшает прежнее достижение ($\frac{82}{99} > \frac{14}{17}$). Теперь ширина найденного нами интервала равна

$$\Delta R_{\text{общ}} = \frac{34}{41} \text{ Ом} - \frac{82}{99} \text{ Ом} = \frac{4}{4059} \text{ Ом} < 0,001 \text{ Ом}.$$

У нас все получилось! Мы сжали интервал до одной тысячной ома.

– Нет, я протестую! Это никуда не годное решение. Смотрите, мы же вначале впаяли полезные проводки, и сопротивление при этом уменьшилось, а затем перерезали проводки, и сопротивление при этом увеличилось!

– Отлично! Очень правильное замечание. Действительно, на первый взгляд может показаться, что иногда мы двигались с нарушением правил одностороннего движения. Но на самом деле мы не нарушали их, а буквально прошли по краешку дозволенного. Да, мы перерезали проводки, но при этом не увеличивали общего сопротивления цепи. Мы использовали наш единственный шанс – перерезали проводки, по которым ток не идет. Дело в том, что, при произвольных значениях параметров x, y и $z = x + y$ в проводках K_1K_2, L_1L_2 и M_1M_2 , конечно, токи есть. Но при значениях этих параметров, дающих максимальное значение сопротивления цепи, изображенной на рисунке 9,а, токов в этих проводках нет. Для того чтобы вы обратили внимание на эти тонкие места наших рассуждений, я даже специально немного изменял цвет рисунков. Но, к сожалению, только один человек заметил мои намеки и задал правильный и нужный вопрос.

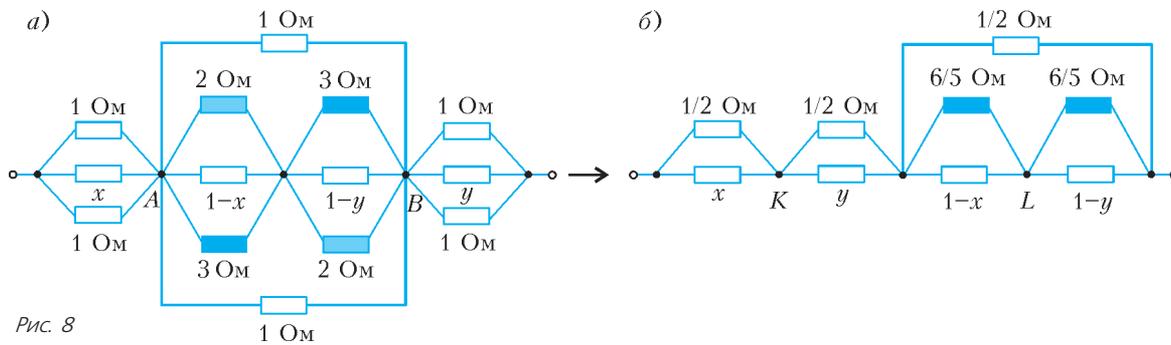


Рис. 8

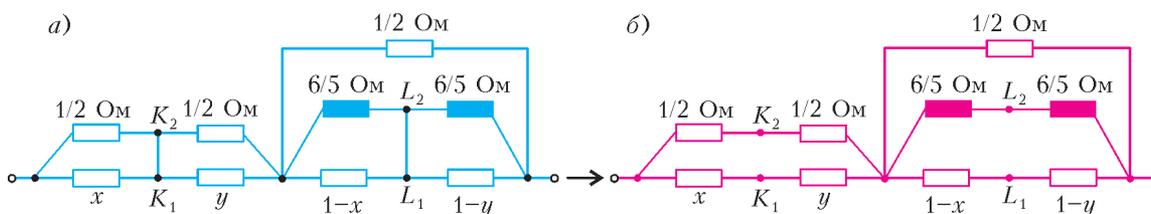


Рис. 9

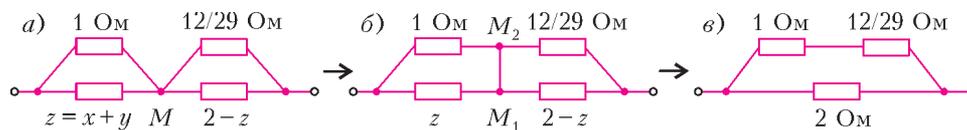


Рис. 10

Ну а теперь, чтобы наше решение приняли все, докажем его правильность. Для этого пройдем по нашим схемам в обратном порядке.

Итак, сопротивление схемы на рисунке 10,б не может быть больше, чем сопротивление схемы на рисунке 10,в. А равным ему может быть? Да, может, если мы распорядимся величиной z так, чтобы в точках M_1 и M_2 потенциал был один и тот же.

Упражнение 3. Каким же должно быть сопротивление z ?

Так давайте именно так и распорядимся. Тогда сопротивление цепей на рисунках 10,а и 9,б будет иметь наибольшее значение, равное $82/99$ Ом.

А теперь – второе тонкое место. Мы уже знаем, что сопротивление схемы на рисунке 9,а не может быть больше чем $82/99$ Ом. А равным ему может быть? Да, может, если мы положим $x = y$. В этом случае, в силу симметрии, по проводкам K_1K_2 и L_1L_2 ток не течет, и мы можем перерезать их без всяких последствий для общего сопротивления цепи. И наша цепь на рисунке 9,а превратится в цепь на рисунке 9,б. Доказательство закончено.

В заключение – еще одно, более сложное, упражнение.

Упражнение 4. Для каждой цепи, изображенной на рисунке 11, найдите интервал указанной ширины, в котором лежит значение общего сопро-

тивления. Дополнительные условия: а) все ясно из рисунка; б) «змейка» из белых сопротивлений $r = 1$ Ом считая черными сопротивлениями номиналом $R = 2000$ Ом; в) сопротивление выделенного ребра тетраэдра равно $R = 100$ Ом, остальных пяти – $r = 1$ Ом; г) сопротивления трех выделенных ребер куба равны $R_1 = 0,4$ Ом, $R_2 = 0,5$ Ом, $R_3 = 0,6$ Ом, остальных девяти – $r = 1$ Ом; д) в бесконечной сетке сопротивление каждого ребра, кроме выделенного, равно $r = 1$ Ом, а выделенного – $R = 1,1$ Ом; е) в бесконечной сетке сопротивление каждого ребра, кроме двух выделенных, равно $r = 1$ Ом, сопротивление серого выделенного ребра равно $R_1 = 1,1$ Ом, белого – $R_2 = 0,92$ Ом.

Подсказка к случаям д и е: сопротивление идеальной сетки между соседними точками A и B равно $R_{ид} = \frac{r}{2} = 0,5$ Ом.

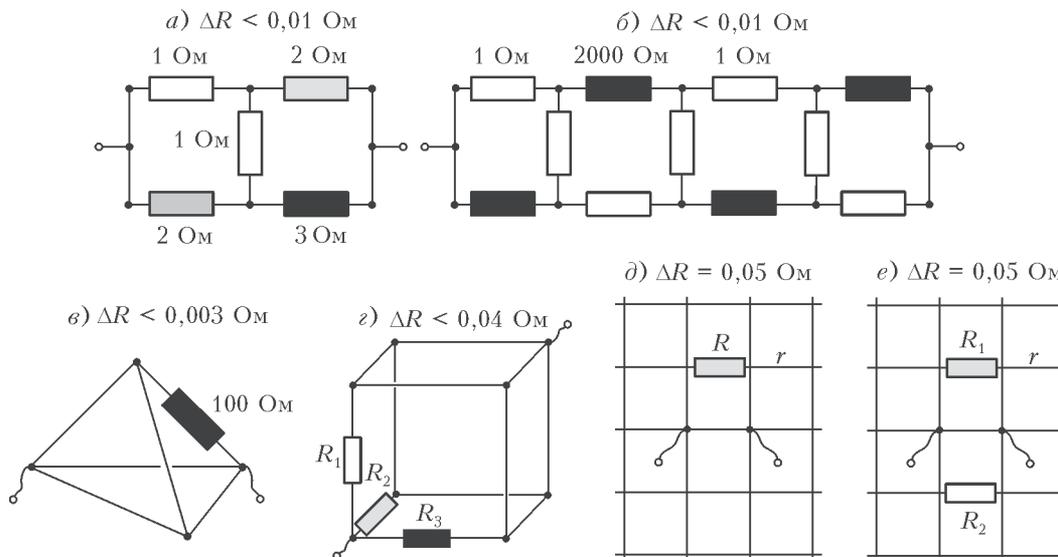


Рис. 11

ОЛИМПИАДЫ

XIX Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии МГУ им. М.В.Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон» и «1С», Издательского Дома «Первое сентября» и журнала «Квант+» провел очередную международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила с 10 по 17 октября 2010 года на полуострове Халкидики (Греция) на берегу Эгейского моря. На олимпиаду приехали участники из разных регионов России, Казахстана и Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике и истории научных идей и открытий. В олимпиаде также участвовали школьники, интересующиеся экологией и биологией.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2010» в командном зачете стала команда лицея 2 города Альметьевска (Россия). Ей был вручен главный приз соревнований – Суперкубок. Команда была также лучшей в турах по истории научных идей и открытий, физике и математике. Второе место в общем зачете заняла команда лицея «Классический» города Ростова-на-Дону (Россия). Она заняла также второе место по истории научных идей и открытий, физике и математике. Команде был вручен большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла команда из Норвегии. Ей также были вручены кубок и диплом.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Иван Кучмиев, ученик 11 класса лицея «Классический» из Ростова-на-Дону. Ему были вручены большая золотая медаль, малая серебряная медаль за второе место по физике и малая бронзовая медаль за третье место по математике. Вторым призером в общем зачете стал Ринат Садыков, ученик лицея 2 из Альметьевска. Ему были вручены большая серебряная медаль и малая золотая медаль за первое место по физике. Большую бронзовую медаль за второе место по физике завоевала Ксения Сафина, представляющая лицей 2 из Альметьевска. Тимур Хусаенов (лицей 2, Альметьевск) получил малую золотую медаль за первое место по математике, а Дамир Фархутдинов (лицей 2, Альметьевск) был награжден за второе место по математике малой серебряной медалью.

Все победители и призеры получили подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XX (юбилейной) Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2011 года в Греции.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Россия, Москва, Пролетарский проспект, д. 15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru (см. также сайт: www.gluon.ru)

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Пусть m и n – четырехзначные положительные числа, имеющие одинаковые суммы цифр, причем $m > n$. Какова а) наименьшая; б) наибольшая разница $m - n$?

2. Из пунктов A и B одновременно с постоянными скоростями выехали навстречу друг другу два велосипедиста, встретились в 70 км от A и продолжили движение, каждый – в своем направлении. В конечных пунктах велосипедисты отдохнули по одному часу, а затем выехали назад с прежними скоростями. Их вторая встреча произошла в 40 км от A . Найдите расстояние AB .

3. Найдите углы треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины всех высот – натуральные числа.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = xy, \\ x^5 + y^5 = 8xy. \end{cases}$$

5. На стороне AC правильного треугольника ABC взяли точку D , а на сторонах AB и BC – точки E и F так, что $DE \parallel BC$, а $DF \parallel AB$. Найдите угол между прямыми AF и CE .

6. Конечно или бесконечно множество троек $(m; n; k)$ натуральных чисел, больших единицы, для которых $m! \cdot n! = k!$? (Для натурального числа q под $q!$ понимают произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до q : $q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q$.)

7. Существуют ли n различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них, если а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 4$; г) n – произвольное натуральное число?

Физика

1. При выполнении упражнения «Летающий скайбордист» гонщик массой $m = 75$ кг движется по трамплину, начиная движение из состояния покоя с высоты $H = 22$ м над краем трамплина (рис.1). На нижнем краю трамплина скорость направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Пролетев по воздуху, гонщик приземлился на горизонтальной поверхности на расстоянии $s = 10$ м от края трамплина. Чему равна работа сил трения движения по снегу?

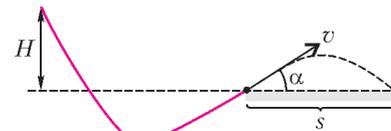


Рис. 1

2. В цилиндрический сосуд, площадь дна которого $S = 250 \text{ см}^2$, залили 1,1 л воды и поместили пенопластовый плотик, ко дну которого была приклеена пластинка из кристаллической соли NaCl . Объем кристаллической пластинки $V_c = 140 \text{ см}^3$, плотность поваренной соли (NaCl) $\rho_c = 2,2 \text{ г/см}^3$, плотность пенопласта $\rho_{\text{п}} = 0,6 \text{ г/см}^3$. Вначале блок из пенопласта и пластинки из соли полностью был

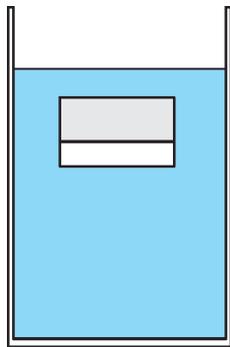


Рис. 2

погружен в воду и «парил» в ее объеме (рис.2). С течением времени соль растворилась. Полученный раствор после этого тщательно перемешали, не вынимая пенопласта. Определите, как изменился уровень жидкости в цилиндре после растворения солевой пластинки. Найдите также объем пенопласта.

Примечание. Несмотря на ничтожную сжимаемость воды, молекулы растворившейся соли заполняют межмолекулярные пустоты, что не приводит к сколько-нибудь заметному изменению объема.

3. В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится идеальный одноатомный газ. Первоначальное давление газа $p = 7,5 \cdot 10^4$ Па, расстояние от дна сосуда до поршня $L = 40$ см, площадь поперечного сечения поршня $S = 60$ см². В результате медленного нагревания газа поршень сдвинулся на расстояние $x = 10$ см. При движении поршня на него со стороны стенок действует сила трения $F_{\text{тр}} = 600$ Н. Какое количество теплоты подвели к газу в этом процессе? Сосуд находится в вакууме.

4. Положительно заряженный шарик массой $m = 1$ г подвешен на нити длиной $L = 1$ м и равномерно движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл (рис.3).

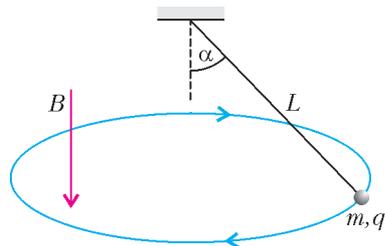


Рис. 3

Заряд шарика $q = 1$ мКл, нить образует с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$. Найдите угловую скорость равномерного обращения шарика по окружности.

5. На непроводящей горизонтальной поверхности лежит жесткая рамка из тонкой однородной металлической проволоки, согнутая в форме квадрата $ACDE$ со стороной b и массой M (рис.4). Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен сторонам AE и CD . По рамке по часовой стрелке протекает ток I . При каком значении B модуля магнитной индукции рамка начинает поворачиваться и каким образом?

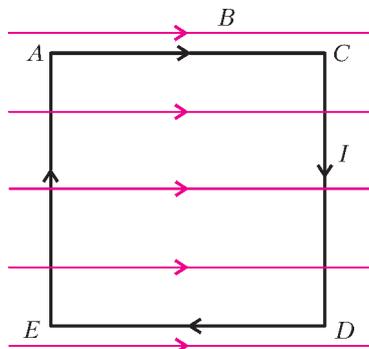


Рис. 4

6. Найдите показатель преломления материала, из которого сделан прозрачный шар, если изображение удаленного предмета фокусируется на задней поверхности этого шара. Достаточно рассмотреть изображение, образованное параксиальными лучами.

7. На гладкой горизонтальной плоскости между двумя закрепленными одинаковыми положительными зарядами $Q = 4$ мКл, отстоящими на расстояние $2L = 2$ м друг от друга, точно посередине находится отрицательный заряд величиной $q = 2$ мКл и массой $m = 1$ г. При малом смещении заряда q из положения равновесия перпендикулярно линии, соединяющей заряды Q , возникают малые колебания. Найдите период этих малых колебаний.

Устный командный тур

Математика

1. Десятичная запись произведения четырех последовательных нечетных чисел оканчивается цифрой 9. Какова предпоследняя цифра этой записи?

2. На параболе $y = x^2$ выбрали точки A, B, C и D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D , если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

3. Тиран собрал мудрецов и сказал: «Завтра я вас соберу снова и надену на каждого белый или черный колпак – так, что вы увидите шапки других, но не свою. Затем по моему свистку вы все, не сговариваясь, поднимете левую или правую руку, при этом люди в белых колпаках должны поднять одну руку, а в черных – другую». И ушел. Мудрецы погоревали, но потом придумали простой способ сделать требуемое. Какой?

4. Из точки O внутри четырехугольника $ABCD$ площади 1 опущены перпендикуляры OK, OL, OM и ON на стороны AB, BC, CD и DA соответственно. Известно:

$$AK \geq KB, BL \geq LC, CM \geq MD, DN \geq NA.$$

Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

5. Можно ли число 2010 представить в виде суммы шести квадратов нечетных чисел?

6. Два игрока по очереди разламывают шоколадку размером 100×99 . За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом вдоль углубления любого из имеющихся кусков. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1 . Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

7. Существуют ли такие действительные числа a, b и c , что при всех действительных значениях x и y выполняется неравенство

$$|x + a| + |x + y + b| + |y + c| > |x| + |x + y| + |y|?$$

8. Какое наибольшее количество прямоугольников размером а) 1×3 клетки; б) 1×4 клетки можно закрасить на листе клетчатой бумаги 10×10 клеток так, чтобы никакие два закрашенных прямоугольника не имели общих точек?

9. На сторонах BC и CD единичного квадрата $ABCD$ взяли точки M и N соответственно. Найдите угол MAN , если периметр треугольника CMN равен 2.

10. Одиннадцать девочек и n мальчиков собрали $n^2 + 9n - 2$ грибов, причем все грибки собрали по одинаковому количеству грибов. Найдите n .

11. Корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + px + q$ таковы, что $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$. Найдите знак числа $f(q)$.

Физика

1. Груз массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 1 м, двигаясь равномерно, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Во все время движения груза нить образует с вертикалью угол 30° . Найдите момент силы натяжения нити относительно точки подвеса.

2. На рисунке 5 приведена электрическая схема, состоящая из четырех одинаковых сопротивлений и одного конденсатора. Найдите сопротивление цепи (постоянному току) между точками a и b .

3. Какая часть количества теплоты (в %), получаемого при изобарном нагревании идеального одноатомного газа, расходуется на из-

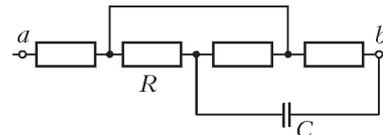


Рис. 5

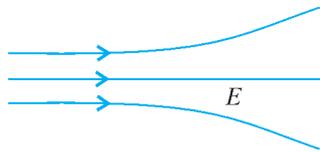


Рис. 6

менение внутренней энергии этого газа?

4. На рисунке 6 приведена картина силовых линий электрического поля. Как будет вести себя металлический шарик, помещенный в это поле?

5. В цепи постоянного тока, показанной на рисунке 7, необходимо изменить сопротивления первого (R_1) и второго (R_2) реостатов с таким расчетом, чтобы мощность, выделяющаяся на втором реостате, увеличилась вдвое, а мощность на третьем реостате (R_3) осталась неизменной.

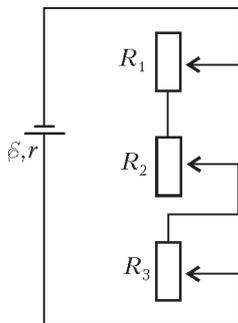


Рис. 7

Как этого добиться? Начальные значения сопротивлений реостатов таковы: $R_1 = 9 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$ и $R_3 = 6 \text{ Ом}$.

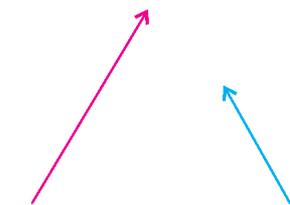


Рис. 8

6. В архивах Виллеброта Снеллиуса (Снелла) нашли рисунок предмета и его изображения в тонкой линзе (рис. 8). Помогите определить, какая это линза, и найти положение ее фокусов.

7. Четыре металлических нагретых бруска положили вплотную друг к другу, как показано на рисунке 9. Между ними начал происходить теплообмен. Стрелки указывают направление теплопередачи от бруска к бруску. В некоторый момент времени термодатчики показали такие температуры брусков: $420 \text{ }^\circ\text{C}$, $280 \text{ }^\circ\text{C}$, $210 \text{ }^\circ\text{C}$, $140 \text{ }^\circ\text{C}$. Укажите, какие температуры измерены у каких брусков.

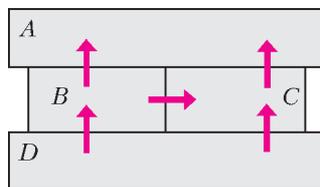


Рис. 9

8. На рисунке 10 приведен график изменения состояния идеального газа в координатах p , V . Как изменялась температура газа в этом процессе?

9. Кот Леопольд сидел у края плоской крыши сарая высотой 2 м и шириной 2,4 м, а озорной мышонок, подкрался с другой стороны сарая и выстрелил по Леопольду из рогатки камнем

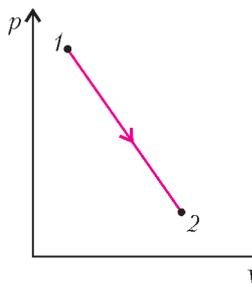


Рис. 10

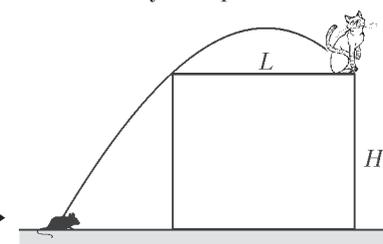


Рис. 11

(рис. 11). Какой должна быть минимальная начальная скорость камня, чтобы мышонок смог попасть в кота?

10. В свободно падающее деревянное тело попадает пуля и застревает в нем. В момент попадания пули в дерево вектор ее скорости был горизонтален. Изменится ли в результате попадания пули полное время падения тела?

История научных идей и открытий

Математика

1. Назовите имена известных вам выдающихся математиков – как советских, так и зарубежных, – принимавших участие в создании ядерного оружия в 40–50-х годах прошлого века.

2. Один из создателей теории чисел французский математик П. Ферма предполагал, что все натуральные числа вида $2^{2^n} + 1$ являются простыми. Однако более чем полвека спустя Л. Эйлер доказал, что число $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$ делится на 641.

Докажите это утверждение.

Указание: $641 = 5^4 + 2^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$.

3. Современная математическая символика создавалась и совершенствовалась в течение многих веков. Например, в 1545 году итальянец Дж. Кардано мог записать некоторое уравнение так:

$$1.\text{cubus } \bar{p}. 5. \text{ positionibus } \bar{a}\text{quantur } 12.$$

Француз Ф. Виет в 1591 году записал бы то же самое уравнение так:

$$1C + 5N, \bar{a}\text{quantur } 12.$$

Уже в 1637 году Р. Декарт записал бы это уравнение почти так же, как и мы.

Что это за уравнение?

4. Выдающийся педагог-математик Андрей Петрович Киселев (1852–1940) создал комплект учебников по математике для средних учебных заведений. По его учебникам с конца XIX до 60-х годов XX века обучались миллионы школьников в России и других странах. Помимо ясного, четкого и строгого изложения предмета, учебники содержали много интересных задач.

Решите задачу из учебника по планиметрии: постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по сумме гипотенузы и катета.

5. Выпишем в порядке возрастания несократимые правильные дроби, знаменатели которых не превосходят заданного натурального числа n . Полученный ряд чисел называется n -м рядом Фарея. Сам Фарея подметил две закономерности:

1) Если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ – соседние дроби ряда Фарея, то $ad - bc = 1$.

2) Если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ – три последовательные дроби ряда Фарея, то

$$\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}$$

(последняя дробь называется медиантой дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{e}{f}$).

В 1816 году О. Коши доказал эти закономерности. В дальнейшем выяснилось, что ряды Фарея оказались весьма полезными при решении целого ряда задач теории чисел.

а) Выпишите первые 6 рядов Фарея.

б) Докажите утверждение 2), предполагая, что утверждение 1 уже доказано.

Физика

1. Сто лет назад, в 1910 году, Нобелевская премия по физике была вручена «за работу над уравнением состояния газов и жидкостей». Ученый, получивший премию, всю свою научную деятельность посвятил работам по молекулярной физике и термодинамике. Построенная к середине XIX века кинетическая теория газов позволяла получить уравнение

состояния идеального газа. Отказавшись от двух допущений молекулярно-кинетической теории идеального газа, ученый получил уравнение состояния реального газа. Более того, он показал, что между газообразным и жидким состояниями вещества нет принципиальной разницы – в том и в другом случае между молекулами действуют силы одной и той же природы. Хотя полученное уравнение и не удовлетворяло полностью экспериментальным данным, оно явилось существенным улучшением более простого закона для идеальных газов. Важным следствием уравнения было установление критической температуры, выше которой ни при каких условиях газ не конденсировался в жидкость, и других критических параметров. Этот ученый сделал также ряд открытий в области молекулярной физики смеси газов и капиллярных явлений. Вдумчивый ученый, состоявший во многих академиях наук мира, в высшей степени порядочный человек, он прожил долгую жизнь.

а) Кто этот ученый?

б) В какой стране он жил?

в) Какие предположения о свойствах молекул реального газа были им сделаны для получения уравнения состояния реального газа?

2. Древнегреческий ученый: математик, физик, инженер. Он жил в одной из средиземноморских греческих колоний. В молодости он много путешествовал, учился в Александрии Египетской, работал в Александрийской библиотеке. Вычисление объема тел и площадей фигур, оценка значения числа π , расчет центров масс плоских фигур и правило рычага, гидростатические законы и гидравлические конструкции, оптические теоремы и устройства, военная техника и строительство – вот далеко не полный перечень его интересов. О нем сложены легенды, о возможности реализации некоторых его легендарных конструкций до сих пор идут споры. Он прожил 75 лет и погиб при взятии его родного города чужестранной армией. Его именем названы математические аксиомы, физические законы и технические устройства, астероид, горная цепь и кратер на Луне, площадь в его родном городе, улицы в двух городах Украины, одном городе России и одном городе Нидерландов.

а) Кто этот ученый?

б) Где находится его родной город и как он называется?

в) Армия какого государства взяла родной город ученого и кто ею командовал?

3. Для изучения строения материи современная физика использует как теоретические, так и экспериментальные

методы. Для исследования взаимодействий элементарных частиц необходимы источники частиц высоких энергий. За последние полвека построены ускорители элементарных частиц с различными энергиями частиц в пучке. В 2008 году запущен новый ускоритель, над которым работали физики из многих стран мира, в том числе и из России. В 2010 году он вышел на проектную мощность, и уже получены первые интересные результаты.

а) О каком ускорителе идет речь?

б) Где он расположен?

в) На какую энергию частиц рассчитан ускоритель?

4. Этот ученый знаменит открытием и исследованием специфического волнового процесса, получившего впоследствии большое практическое значение в аэродинамике, гидродинамике, физике плазмы. Его именем названы многие величины и понятия, например число... и конус... Он также знаменит глубоким критическим анализом механики Ньютона. Физики назвали высказанные им идеи принципом, носящим его имя. Эйнштейн строил свою общую теорию относительности, опираясь на этот принцип. Сам автор принципа не принял даже специальную теорию относительности. Он также утверждал, что идея атомизма лишена физического основания, считая, что материя непрерывна.

а) Назовите этого ученого.

б) Как называется открытый им аэродинамический процесс и как называются величины, связанные с именем этого ученого?

5. Этот английский ученый был одновременно архитектором, много занимался вопросами строительной механики. Он впервые предложил закон всемирного тяготения, позже сформулированный и опубликованный Ньютоном. Ранее он изобрел и построил воздушный насос, экспериментируя с которым открыл газовый закон, названный впоследствии законом Бойля–Мариотта. Наблюдая цвета тонких пленок, открыл явление интерференции и объяснил его, выдвинув идею о волновой природе света одновременно с Гюйгенсом. С помощью усовершенствованного им микроскопа открыл живую клетку (ему же принадлежит сам термин «клетка»). И многое другое.

а) Кто этот ученый?

б) Какой музей мира располагает портретом этого ученого?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, О.Карпов, А.Кравцов, В.Крыштон, Ж.Работ, Л.Шляпочник

XVI Международный турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в очередном, XVI Турнире «Компьютерная физика» в январе-феврале 2012 года.

Заявки на участие присылайте по адресу:

115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт: www.gluon.ru

ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА

«Магнитная ловушка»

Движение заряженных частиц, управляемое электромагнитными полями, используется во многих технических устройствах и физических экспериментальных установках. В современной технике широкое распространение получили электронно-лучевые трубки, магнетроны, клистроны, лампы бегущей и обратной волны и другие сверхвысокочастотные приборы. Для физических исследований строятся ускорители заряженных частиц – от сравнительно простых циклот-

ронов до знаменитого Большого адронного коллайдера. Успех в решении такой важной задачи, как управляемый термоядерный синтез, во многом определялся возможностью формирования нужных траекторий заряженных частиц в сверхвысокотемпературной плазме. Понимание многих астрофизических процессов, например формирования радиационных поясов Земли, также требует изучения движения заряженных частиц в электромагнитном поле.

Рассмотрим движение электрона в магнитном поле бесконечного прямолинейного тонкого проводника, по которому течет ток I , создающий вокруг проводника магнитное поле. На движущийся со скоростью \vec{v} заряд действует сила Лоренца. В соответствии со вторым законом Ньютона, справедливо уравнение движения

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}),$$

где m и e – масса и заряд электрона соответственно, \vec{r} – радиус-вектор электрона, $\vec{B}(\vec{r})$ – индукция магнитного поля. Индукция поля, создаваемого бесконечным прямолинейным проводником, равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \vec{n} \times \vec{r},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, \vec{n} – единичный вектор, направленный по току. В результате уравнение движения электрона приобретает вид

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\mu_0 e I}{2\pi} \frac{\vec{n}(\vec{v} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{v} \cdot \vec{n})}{r^2}.$$

Это уравнение позволяет рассчитать траекторию заряженной частицы и определить ее параметры – такие, например, как радиус кривизны, а для спиралевидных траекторий еще и шаг. Выберем декартову систему координат таким образом, что ее начало находится на проводнике, ось Oz направлена по току, две другие оси перпендикулярны проводнику. Запишем уравнения движения в проекциях на эти оси:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\mu_0 e I}{2\pi} \frac{x \frac{dz}{dt}}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{\mu_0 e I}{2\pi} \frac{y \frac{dz}{dt}}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\mu_0 e I}{2\pi} \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

В случае если к магнитному полю, создаваемому током, добавляется однородное магнитное поле, индукция которого равна B_0 и направлена по току, то уравнения движения преобразуются к виду

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\mu_0 e I}{2\pi} \frac{B_0 \frac{dy}{dt} - x \frac{dz}{dt}}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{\mu_0 e I}{2\pi} \frac{B_0 \frac{dx}{dt} + y \frac{dz}{dt}}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\mu_0 e I}{2\pi} \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Задание

1. Определите характер (плоская или пространственная) и вид траектории электрона в поле тонкого бесконечно длинного проводника с током и рассчитайте параметры (радиус кривизны, шаг, наличие особенностей) траектории при следующих начальных координатах: (30 см; 0; 0), (1 м; 0; 0), (3 м; 0; 0). Начало отсчета выберите на оси проводника, ось Oz направьте по току в проводнике. Задайте в каждой начальной точке следующие значения проекций начальной скорости: (0; 3 м/с; 0,3 м/с), (0; 30 м/с; 30 м/с), (0; 100 м/с; 300 м/с).

2. Определите характер (плоская или пространственная) и вид траектории электрона в поле тонкого бесконечно длинного проводника с током и рассчитайте параметры (радиус кривизны, шаг, наличие особенностей) траектории при начальных координатах (1 м; 0; 0). Начало отсчета выберите на оси проводника, ось Oz направьте по току в проводнике. Задайте следующие значения проекций начальной скорости: (1 м/с; 0; 0), (1 м/с; 1 м/с; 1 м/с), (20 м/с; 20 м/с; 20 м/с).

3. Определите характер (плоская или пространственная) и вид траектории электрона в поле тонкого бесконечно длинного проводника с током и в наложенном на него однородном магнитном поле с индукцией B_0 , направленной по току, и рассчитайте параметры (радиус кривизны, шаг, наличие особенностей) траектории при начальных координатах (1 м; 0; 0). Начало отсчета выберите на оси проводника, ось Oz направьте по току в проводнике. Задайте следующие значения проекций начальной скорости: (0; 30 м/с; 30 м/с). Расчеты проведите для значений модуля B_0 магнитной индукции 0,1 мкТл, 1 мкТл, 3 мкТл.

Математическое приложение

Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка – это сложная процедура, поэтому одно уравнение второго порядка сведем к двум уравнениям первого порядка. Запишем получившуюся подсистему уравнений для первого уравнения исходной системы:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{\mu_0 e I}{2\pi} \frac{x \frac{dz}{dt}}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \frac{dx}{dt} &= v_x, \end{aligned}$$

где v_x – проекция скорости электрона, x – координата частицы. Конечно-разностная схема для численного решения этой системы уравнений проще, чем для исходного уравнения. Для примера, конечно-разностная производная от скорости по времени вычисляется как

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{x0}}{\Delta t},$$

где v_{x0} – координата скорости частицы в некоторый момент времени t_0 , v_x – проекция скорости частицы через малый интервал времени Δt . Для координаты x (и для других координат) конечно-разностная производная строится аналогично.

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Кравцов

Избранные задачи Санкт-Петербургской городской олимпиады по математике

После номера задачи указано, в каком классе она предлагалась.

1 (6). На острове живет племя рыцарей и племя лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова заявил: «В моем племени у меня больше друзей, чем в другом». Может ли рыцарей быть меньше, чем лжецов?

С. Берлов

2 (6). На плоскости нарисованы горизонтальные и вертикальные отрезки трех цветов, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Каждый синий отрезок пересекает ровно 100 зеленых, каждый зеленый – ровно 100 красных, а каждый красный – ровно 100 синих. Укажите наименьшее возможное количество нарисованных отрезков.

С. Берлов

3 (7). В двух соседних вершинах правильного 777-угольника стоят фишки. Если фишки стоят в вершинах A и B , то их разрешается одновременно переставить в вершины C и D , если треугольники ABC и ABD равнобедренные. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы фишки стояли в двух вершинах через одну?

Ф. Бахарев, А. Смирнов

4 (7). Внутри треугольника даны точки A , B , C и D . Докажите, что на сторонах треугольника найдется такая точка K , что $KA + KB \geq KC + KD$.

С. Берлов

5 (8). Натуральные числа a , b , c таковы, что

$$a + c = 2011201120112011 \text{ и } (5a - b)(c + b) = b^2.$$

Докажите, что числа a , b , c имеют общий делитель, больший 1.

Ф. Петров

6 (8). В некоторых клетках доски 100×100 расставлены фишки. Клетка называется хорошей, если ровно в двух соседних с ней по стороне клетках стоят фишки, причем эти две клетки граничат по углу. (В хорошей клетке фишка может стоять, а может и не стоять.) Может ли на доске быть ровно 2011 хороших клеток?

С. Берлов

7 (8). В строку без пробелов в порядке возрастания выписаны все натуральные числа от 1 до 100002, получилась десятичная запись огромного числа. Докажите, что для каждого двузначного простого числа p можно в этом огромном числе заменить нулями две соседние цифры так, чтобы полученное число делилось на p .

Жюри

8 (9). Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $AD = DC$. Прямая BD пересекает сторону AC в точке E . Оказалось, что $\frac{BD}{BE} = \frac{AE}{EC}$. Докажите, что $BE = BC$.

Ф. Бахарев

9 (9, 10). В городе Угрюмове 2000000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых жителей.

А. Голованов, С. Берлов

10 (9). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ все углы меньше 150° , причем сумма углов A и D равна 150° . Докажите, что его площадь больше чем

$$\frac{1}{4}(AB \cdot CD + AB \cdot BC + BC \cdot CD).$$

С. Берлов

11 (9). Бесконечная последовательность a_1, a_2, a_3, \dots составных натуральных чисел задается следующим правилом: $a_{n+1} = a_n - p_n + \frac{a_n}{p_n}$, где p_n – наименьший простой делитель a_n . Известно, что все члены последовательности кратны 37. Какие значения может принимать число a_1 ?

О. Иванова

12 (9). Саша и Сережа играют в игру на правильном стоугольнике. В начале игры Саша расставляет в вершинах стоугольника натуральные числа. Далее игроки ходят по очереди, начинает Сережа. Каждым ходом Сережа прибавляет по 1 к числам в двух противоположных вершинах, а Саша прибавляет по 1 к числам в двух соседних вершинах. Сережа стремится к тому, чтобы после его хода в вершинах стоугольника стояло как можно больше нечетных чисел. Какого наибольшего количества нечетных чисел он сможет добиться независимо от Сашиних действий?

С. Берлов

13 (10, 11). Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC с углом $\angle B = 30^\circ$. Луч BO пересекает отрезок AC в точке K . Точка L – середина дуги OC описанной окружности треугольника KOC , не содержащей точку K . Докажите, что точки A, B, L, K лежат на одной окружности.

Ф. Петров

14 (10, 11). Назовем число x *далеким от квадратов и кубов*, если для каждого целого числа k выполняются неравенства $|x - k^2| > 10^6$ и $|x - k^3| > 10^6$. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n , что число 2^n далеко от квадратов и кубов.

А. Голованов, С. Иванов

15 (11). В тайном обществе 2011 членов, и у каждого есть счет в банке (на счету целое число рублей, которое может быть отрицательным). Время от времени один из членов общества переводит со своего счета на счет каждого из своих друзей, состоящих в обществе, по 1 рублю. Известно, что с помощью цепочки таких переводов можно перераспределить имеющиеся на счетах средства произвольным образом. Докажите, что в этом обществе ровно 2010 пар друзей.

К. Кохась

Публикацию подготовил К. Кохась

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная школа СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра физико-математического и химико-биологического профиля Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже более 45 лет работает созданная по инициативе академика М.А.Лаврентьева Заочная физико-математическая школа (ЗШ).

Ежегодно лучшие ученики 9 и 10 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в Академгородке с 3 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели обычных и гимназических классов в школах России и стран СНГ могут вести занятия по программам заочной школы СУНЦ НГУ в форме факультативных занятий.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие, независимо от возраста. Прием в школу ведется круглогодично. Чтобы стать учеником ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых вы хотите учиться, свою фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание оформляется в обычной ученической тетради и высылается простой бандеролью. Можно присылать работы и по электронной почте. Требования к оформлению работ в электронном виде и более подробную информацию можно найти на сайте <http://zfmsh.nsu.ru>

Наш почтовый адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-4066, 339-4066

E-mail: distant@sesc.nsu.ru или zfmsh@yandex.ru

Ниже приводится первое задание по математике для математического отделения и первое задание по физике для физического отделения Заочной школы СУНЦ НГУ.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

Математическое отделение

Внимание! Необходимо присылать решенное задание класса, в котором вы будете учиться в Заочной школе.

5 класс

1. В выражении $1 : 2 : 3 : 4$ расставьте скобки так, чтобы получилось: а) наибольшее число; б) наименьшее число. Объясните полученные результаты.

2. Ваня проехал первую половину пути в 1 км на велосипеде со скоростью 15 км/ч, а вторую половину прошел пешком со скоростью 5 км/ч. Петя все это расстояние пробежал со скоростью 10 км/ч. Кто из мальчиков затратил на путь больше времени и на сколько?

3. Найдите, сколько всего двузначных чисел делятся на 7 без остатка.

4. Найдите сумму $1000 - 999 + 998 - 997 + \dots + 4 - 3 + 2 - 1$.

5. На каждую из шести граней кубика произвольным образом помещено одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 (на всех гранях числа разные). Объясните, почему обязательно найдутся две соседние грани, на которых расположены соседние числа.

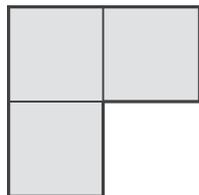


Рис. 1

6. Фигуру, составленную из трех равных квадратов (рис.1), разрежьте на четыре равные между собой фигуры.

6 класс

1. Найдите, сколько всего трехзначных чисел делятся на 7 без остатка.

2. Чему равен наименьший периметр прямоугольника, который можно сложить из 25 маленьких прямоугольников размером 1×2 см?

3. В выражении $1 : 2 : 3 : 4 : 5$ расставьте скобки так, чтобы получилось: а) наибольшее число; б) наименьшее число. Объясните полученные результаты.

4. Скорость течения реки, соединяющей пункты A и B , весной равна 2 км/ч, летом 1 км/ч, а скорость катера относительно воды равна 16 км/ч. Определите, весной или летом катеру потребуется меньше времени, чтобы проплыть из A в B и обратно.

5. Найдите сумму всех несократимых дробей, больших нуля и меньших единицы, знаменатели которых меньше 10.

6. Фигуру, составленную из пяти равных квадратов (рис.2), разрежьте на четыре равные между собой фигуры.

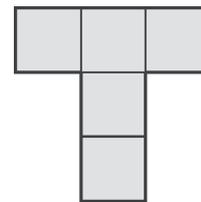


Рис. 2

7 класс

1. В первом случае некоторое число сначала увеличили на 1%, затем полученное число уменьшили на 1%. Во втором случае исходное число сначала уменьшили на 1%, затем полученное число увеличили на 1%. В каком из случаев получился больший результат?

2. Чему равен наименьший периметр прямоугольника, который можно сложить из 20 маленьких прямоугольников размером 2×3 см?

3. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что расстояния от нее до вершин A и D равны стороне квадрата. Найдите величины углов MBC и MCB .

4. В зоопарке живут змеи, птицы и тигры – всего 15 голов и 28 ног. Кого больше: змей или тигров и на сколько?

5. Представьте число $1/3$ в виде суммы шести дробей вида $1/n$, все знаменатели которых различны.

6. Известно, что среди 8 монет имеется одна фальшивая, которая легче остальных. Как с помощью двух взвешиваний на рычажных весах без гирек найти фальшивую монету?

8 класс

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 4, на 5, на 6 и на 7 остатки, равные 3.

2. Скорость течения реки, соединяющей пункты A и B , весной больше, чем летом, а скорость катера относительно воды постоянна. Определите, весной или летом катеру потребуется меньше времени, чтобы проплыть из A в B и обратно.

3. Вне квадрата $ABCD$ взята точка M так, что расстояния от нее до вершин A и D равны стороне квадрата. Найдите величины углов AMB и DMC .

4. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

5. С помощью циркуля и линейки постройте трапецию, если заданы ее основания и диагонали.

6. Представьте число $1/2$ в виде суммы пяти дробей вида $1/n$, все знаменатели которых различны.

9 класс

1. Докажите, что если каждое из двух чисел представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, то их произведение также можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

2. Из вершины C параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры CK и CL на стороны AB и AD соответственно. Докажите, что $AB \cdot BK = AD \cdot DL$.

3. В треугольнике ABC через центр вписанной окружности параллельно AC проводится прямая, которая пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $AM + CN = MN$.

4. В ящике лежат 70 шаров, из них 20 красных, 20 желтых, 20 зеленых, а остальные – белые и черные. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть, чтобы среди них наверняка было 10 шаров какого-нибудь одного цвета?

5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению $\sqrt{x - \frac{1}{5}} + \sqrt{y - \frac{1}{5}} = \sqrt{5}$.

6. Можно ли выпуклый 7-угольник разрезать на параллелограммы? Дайте обоснование ответа.

10 класс

1. Буратино вышел из школы и пошел домой, а спустя 10 минут из дома в школу на родительское собрание отправился папа Карло. Оба шли по одной и той же дороге с постоянными скоростями. Определите, сколько времени они шли после встречи, если целей они достигли одновременно, а Буратино до встречи шел 18 минут.

2. На продолжении стороны AB треугольника ABC отложен отрезок $BC_1 = kAB$, на продолжении стороны BC отложен отрезок $CA_1 = kBC$, на продолжении CA отложен отрезок $AB_1 = kCA$, где $0 < k < 1$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

3. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению $\sqrt{\frac{10}{13} + x} + \sqrt{\frac{10}{13} - y} = \sqrt{13}$.

4. Из середины каждой стороны произвольного треугольника ABC во внешнюю сторону перпендикулярно стороне восстановлен вектор, длина которого равна длине соответствующей стороны. Докажите, что сумма этих трех векторов равна нулевому вектору.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^3 + xy = 2, \\ y^3 + 3xy = -3. \end{cases}$$

6. На координатной плоскости дана фигура, площадь которой меньше 1. Докажите, что фигуру можно переместить параллельно так, что она не будет содержать ни одной точки с целыми координатами.

11 класс

1. Радиус основания прямого кругового конуса равен 4, а высота равна 3. Какую наибольшую площадь может иметь сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину?

2. Решите уравнение

$$\log_2 \left(x^2 - x + \frac{9}{4} \right) + (\log_2 x)(\log_2 4x) = 0.$$

3. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, AH и CF – высоты, проведенные из вершин A и C соответственно. Докажите, что $HF \perp BO$.

4. Докажите, что $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^3 = 3xy + 3, \\ y^3 = xy - 2. \end{cases}$$

6. Из центра каждой грани произвольного тетраэдра $ABCD$ во внешнюю сторону перпендикулярно грани восстановлен вектор, длина которого равна площади соответствующей

грани. Докажите, что сумма этих четырех векторов равна нулевому вектору.

Физическое отделение

Внимание! Необходимо присылать решенное задание класса, в котором вы будете учиться в Заочной школе.

8 класс

1. В наполненный до краев водой сосуд опускают кусок льда. Часть воды, объем которой равен объему погруженной части льда, при этом выливается. Изменится ли давление воды на дно, когда лед растает? Ответ обоснуйте.

2. Прямоугольный аквариум с площадью дна $S = 1500 \text{ см}^2$ заполнен водой до высоты $h = 30 \text{ см}$. а) Каково давление воды на дно? Какова сила давления на дно? б) Какова сила давления воды на боковую стенку аквариума, если его ширина $L = 30 \text{ см}$?

3. Два поезда, длины которых $L_1 = 150 \text{ м}$ и $L_2 = 100 \text{ м}$, движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 15 \text{ м/с}$ и $v_2 = 10 \text{ м/с}$ соответственно. В течение какого времени первый поезд пройдет мимо головы второго? Через какое время с момента встречи поезда разойдутся?

4. Человек, находясь на расстоянии $L = 28 \text{ м}$ от стены, начал хлопать в ладоши с частотой 3 хлопка в секунду. Эхо приходит к нему точно посередине промежутка времени между хлопками. Найдите скорость звука в воздухе.

5. На равноплечих весах уравновешены свинцовое и алюминиевое тела. Тела опускают в воду. Нарушится ли равновесие? Ответ обоснуйте.

9 класс

1. Мальчик $1/4$ времени ехал на велосипеде со скоростью v , затем велосипед сломался, и оставшуюся $1/3$ часть пути мальчик прошел пешком, волоча велосипед за собой. С какой скоростью мальчик шел пешком? Во сколько раз быстрее он мог бы проделать путь, если бы велосипед не поломался?

2. Под килем стоявшей у пирса баржи была вода высотой $h = 1,4 \text{ м}$ (рис.3). Какой наибольшей высоты слой зерна можно насыпать на палубу баржи, чтобы она не села на дно? Плотность зерна $\rho = 700 \text{ кг/м}^3$, а плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

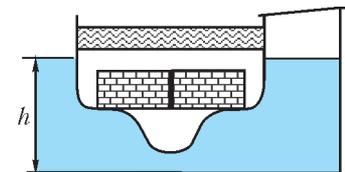


Рис. 3

3. Для того чтобы сделать переменное сопротивление из подручных материалов, экспериментатор сначала сложил отрезок проволоки вдвое. Затем он прикрепил контакт A к месту изгиба проволоки, а контакт B – к ее свободному концу (рис.4).

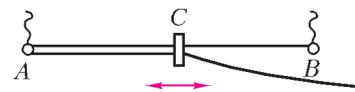


Рис. 4

Потом он подвижной перемычкой C соединил участки проволоки между собой. При крайнем левом положении перемычки сопротивление между контактами было R . На какое расстояние от левого контакта нужно передвинуть перемычку, чтобы получить сопротивление $2/3 R$? Длина отрезка AB постоянна и равна L .

4. Не сумев подвесить котелок над костром, турист решил нагреть воду, бросая в котелок нагретую в костре гальку. После того как он бросил первый камушек, температура в

котелке повысилась от T_1 до T_2 , после второго – от T_2 до T_3 . Определите температуру, до которой галька нагрелась в костре.

10 класс

1. Турист 2 часа шел на север со скоростью 6 км/ч, затем он сделал привал и потом три часа шел на восток со скоростью 5 км/ч. Определите минимальное время, которое ему необходимо затратить, чтобы вернуться в исходный пункт путешествия, двигаясь со скоростью 5 км/ч.

2. Плавающий тонкостенный стакан объемом V постепенно наполняли гранулированным материалом. Когда его

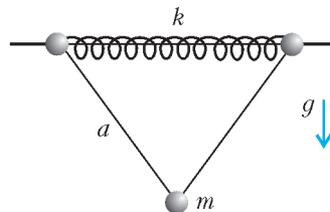


Рис. 5

заполнили полностью, стакан утонул – при этом уровень воды в кастрюле, в которой плавал стакан, понизился на h . Радиус кастрюли R , плотность воды ρ . Определите плотность гранул. Массой стакана пренебречь.

3. Две бусинки нанизаны на горизонтальную спицу и разделены пружиной жесткостью k (рис.5). Через отверстия бусинок проделали нить, пропустили ее через третью бусинку, имеющую массу m , и связали концы нити. После того как конструкцию отпустили и она пришла в равновесное состояние, нить образовала правильный треугольник со стороной a . Определите начальную длину пружины.

4. Автомобиль при неработающем двигателе катится по пологому склону. При отжатой педали тормоза его ускорение равно $a_1 = 2$ м/с, при нажатой педали оно составляет $a_2 = -1$ м/с. Какое минимальное число раз водителю нужно будет нажимать на педаль тормоза, чтобы путь 900 м от остановки до остановки пройти со средней скоростью 60 км/ч?

5. Брусок находится на краю ступени лестницы, а между ним и предыдущей ступенью вставлена недеформированная пружина жесткостью k . Сжимая пружину, брусок сместили влево на расстояние L и отпустили – он пришел в движение, достиг края ступени и упал на следующую ступень на расстоянии L от предыдущей (рис.6). Определите коэффициент трения между бруском и лестницей, если высота ступеней h .

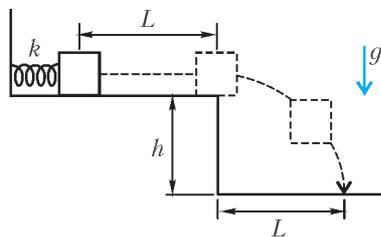


Рис. 6

коэффициент трения между бруском и лестницей, если высота ступеней h .

11 класс

1. Решите задачу 1 для 10 класса.
 2. Какой должна быть жесткость пружины (рис.7), чтобы перемещенный из точки A в нижнюю точку B полусферической чаши радиусом R шарик массой m выскочил из нее, после того как его отпустят? Пружина закреплена в точке C и вначале не деформирована.

3. Вертикально стоящий закрытый цилиндрический сосуд высотой H разделен легким подвижным поршнем на две равные части (рис.8). Над поршнем имеется слой жидкости плотностью ρ и высотой h . Поршень находится в равнове-

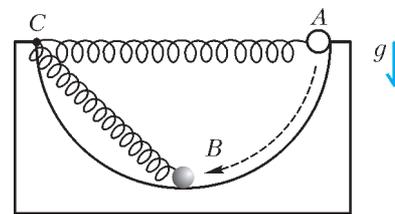


Рис. 7

сии. При этом давление в верхнем отсеке равно p . Определите давление, которое будет в этом отсеке после того, как сосуд перевернут.

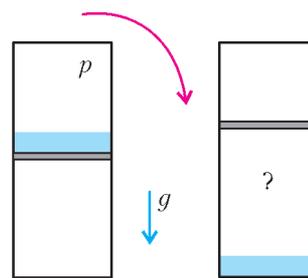


Рис. 8

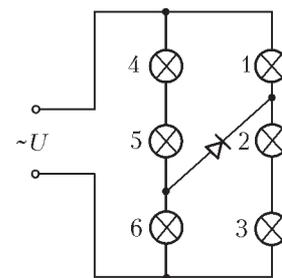


Рис. 9

4. Изображенная на рисунке 9 схема подключена к источнику переменного напряжения. Все лампочки одинаковы, их сопротивление не зависит от накала. Мощность, выделяемая в лампочке 1, равна P . Определите мощность в остальных лампочках. Изображенный на схеме диод является идеальным проводником для тока, протекающего по направлению стрелки, и изолятором для тока другого направления.

5. Для того чтобы перемещать пучок заряженных частиц массой m , зарядом q и скоростью v , используется изображенное на рисунке 10 устройство. Внутри сеточной коробки шириной b с нулевым потенциалом находится коробка шириной a , находящаяся под регулируемым напряжением. Пучок падает под углом α к нормали коробки. Определите, на сколько сместится пучок, если на внутреннюю коробку подать напряжение ϕ .

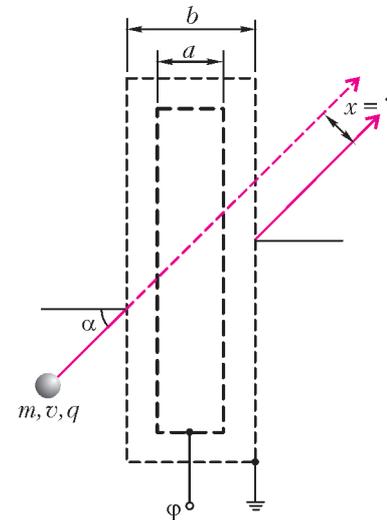


Рис. 10

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. Квант №2)

1. Нет, не все.

Клерков станет в два раза меньше (так как 50% – это $\frac{1}{2}$), а получать каждый будет в полтора раза больше (150% – это $\frac{3}{2}$). В итоге расходы будут составлять $\frac{3}{4}$ от того, что было до увольнения, т.е. общие расходы уменьшатся.

2. Да, могла.

По условию траектория космического корабля лежит на сфере радиуса $R = 10000$ км. Пусть корабль сначала полетит по меридиану от «северного полюса» сферы к «южному», немного не долетев, свернет на запад и почти сразу – на север (рис.1).



Рис. 1

Немного не долетев до северного полюса, снова свернет на запад, пролетит чуть-чуть и повернет на юг. К этому моменту корабль пролетит почти два меридиана (в нашем случае это $2\pi R \approx 62000$ км). Продолжая так летать туда-сюда от полюса до полюса, корабль будет понемногу смещаться на запад. Если сдвиги на запад очень маленькие, корабль успеет сделать очень много «зигзагов», не пересекая свою траекторию, и пролетит очень большое расстояние. В нашем случае уже после двадцатого подлета к северному полюсу длина пути корабля будет больше $20 \cdot 60000$ км = 1200000 км. После этого он сможет полететь прямо на северный полюс и замкнуть траекторию.

3. Хотя поначалу кажется, что так не бывает, описанная в задаче ситуация возможна. Пусть на станции отправления ребята, войдя в метро, попадают к последнему вагону поезда, а выход на следующей станции находится у первого вагона. Вася садится в последний вагон поезда, а Петя, опоздав на несколько мгновений, идет вперед по платформе и как раз успевает сесть в первый вагон следующего поезда. Тогда он придет ближе к выходу. Но ведь и Вася, приехав на следующую станцию раньше, пойдет к выходу и снова окажется впереди Пети? Да, но при условии, что Петин поезд будет столько же ехать от одной остановки до другой, сколько и

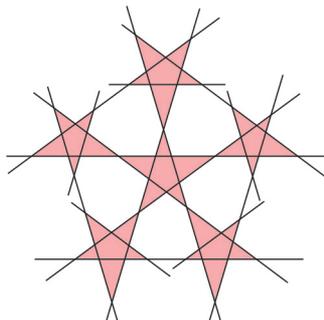


Рис. 2

от него камушки движутся со скоростью, равной по величине скорости v автомобиля, но каждый камушек движется в свою сторону (рис.3). Чтобы найти скорость камушка в неподвиж-

ной системе отсчета, надо к скорости камушка векторно прибавить скорость автомобиля (рис. 4). В результате получится, что все камушки летят преимущественно вперед и поэтому могут попасть Саше в лицо даже еще до встречи его с автомобилем.

Продолжая так летать туда-сюда от полюса до полюса, корабль будет понемногу смещаться на запад. Если сдвиги на запад очень маленькие, корабль успеет сделать очень много «зигзагов», не пересекая свою траекторию, и пролетит очень большое расстояние. В нашем случае уже после двадцатого подлета к северному полюсу длина пути корабля будет больше $20 \cdot 60000$ км = 1200000 км. После этого он сможет полететь прямо на северный полюс и замкнуть траекторию.

Хотя поначалу кажется, что так не бывает, описанная в задаче ситуация возможна. Пусть на станции отправления ребята, войдя в метро, попадают к последнему вагону поезда, а выход на следующей станции находится у первого вагона. Вася садится в последний вагон поезда, а Петя, опоздав на несколько мгновений, идет вперед по платформе и как раз успевает сесть в первый вагон следующего поезда. Тогда он придет ближе к выходу. Но ведь и Вася, приехав на следующую станцию раньше, пойдет к выходу и снова окажется впереди Пети? Да, но при условии, что Петин поезд будет столько же ехать от одной остановки до другой, сколько и

Васин. На самом деле, поезда в метро ходят не с постоянной скоростью. Петин поезд мог потратить на перегон немного меньше времени, чем Васин, – и этого вполне могло хватить, чтобы Петя оказался в итоге ближе к выходу.

4. Можно. Пример – на рисунке 2.

5. В системе отсчета, связанной с автомобилем, все точки обода колеса и оторвавшиеся

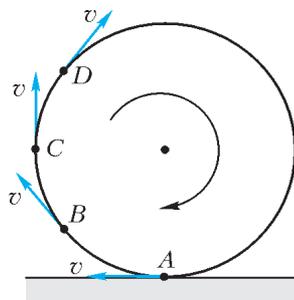


Рис. 3

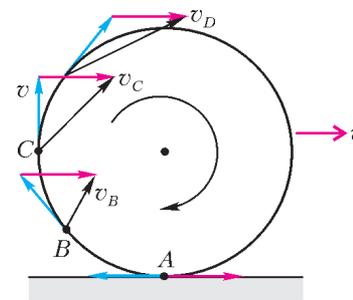


Рис. 4

ной системе отсчета, надо к скорости камушка векторно прибавить скорость автомобиля (рис. 4). В результате получится, что все камушки летят преимущественно вперед и поэтому могут попасть Саше в лицо даже еще до встречи его с автомобилем.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

(см. «Квант» №6 за 2010 г.)

11. а) 4 часа (дня или ночи).

Обе стрелки показывают на часовые деления, поэтому на часах целое число часов. Значит, минутная стрелка стоит на 12 часах, часовая – на 4 часах, а сами часы лежат на правом боку.

б) Такого момента нет (если, конечно, мы умеем отличать день от ночи).

Положение часовой стрелки в промежутке от одного часового деления до следующего однозначно определяет, на сколько сдвинулась минутная стрелка с деления, обозначающего 12 часов. Поэтому можно найти это деление, а значит, и узнать время, которое показывают часы.

12. Да, могло.

Например, если в бочках было 2, 2, 3, 4, ..., 9, 10 литров воды.

13. Их поровну.

Напомним, что из трех отрезков можно построить треугольник тогда и только тогда, когда самый большой из отрезков короче суммы двух других.

Вырежем из зеленой бумаги всевозможные разносторонние треугольники с целыми длинами сторон от 1 до $N + 3$, а из красной – всевозможные треугольники с целыми длинами сторон от 1 до N . Для доказательства того, что зеленых и красных треугольников поровну, объясним, как можно разбить их на пары разноцветных.

Каждому красному треугольнику с длинами сторон a, b, c , где $a \leq b \leq c$, поставим в пару зеленый треугольник с длинами сторон $a + 1, b + 2, c + 3$. Такой зеленый треугольник есть, так как эти длины, очевидно, различны, не превышают $N + 3$ и большая сторона длиннее суммы двух других: $(a + 1) + (b + 2) > c + 3$, поскольку $a + b > c$.

Наоборот, рассмотрим теперь зеленый треугольник со сторонами $x < y < z$. Ему надо поставить в пару красный треугольник со сторонами $x - 1, y - 2, z - 3$. Проверим, что такой красный треугольник и вправду существует. Заметим сначала, что каждая сторона зеленого треугольника хотя бы на 1 короче следующей по длине (ведь длины сторон целые). Тогда длина x самой маленькой стороны больше 1 – иначе сумма $x + y$ будет равна $y + 1$, т.е. будет не больше z , а это противоречит неравенству треугольника. Значит, $y > 2$ и $z > 3$. Поэтому длины $x - 1, y - 2, z - 3$ натуральные. Они, очевидно, не превосходят N . Так как $x - 1 \leq y - 2 \leq z - 3$, осталось проверить, что $(x - 1) + (y - 2) > z - 3$, а это неравенство очевидно следует из неравенства $x + y > z$.

14. Выберем одного школьника – A и поставим его в первый ряд, напротив A (во второй ряд) поставим того, кто был с ним в паре в первый раз, – B . Справа от A поставим в первый ряд того, кто был в паре с B во второй раз, – B , а напротив B поставим того, кто был с ним в паре в первый раз, – G , и так далее (рис. 5). У нас получается цепочка, в которой каждый знаком со следующим и предыдущим и школьники поочередно стоят то в первом ряду, то во втором. В какой-то момент мы дойдем до школьника, который

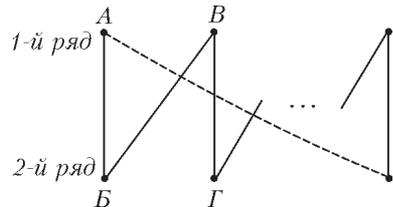


Рис. 5

был в паре с A во второй раз, и наша цепочка замкнется. Если мы охватили еще не всех школьников, точно так же будем строить новую цепочку, добавив в первый ряд любого еще неохваченного школьника, и так далее. В конце концов мы получим, что в первом ряду 30 человек и никто из них не был друг с другом в паре, аналогично – во втором ряду. Выберем тогда любых 10 человек из первого ряда. Во втором ряду с ними участвовали в парах 20 человек, а значит, 10 – не участвовали. Добавим этих 10 человек к уже выбранным десяти и получим группу из 20 человек, в которой никто не был друг с другом в паре. Оставшиеся 20 человек первого ряда и оставшиеся 20 человек второго ряда можно взять за вторую и третью искомые группы.

15. Отразим точки C , P и Q относительно прямой AB , получим точки D , P' и Q' соответственно (рис. 6). Четырехугольник $ACBD$ – ромб.

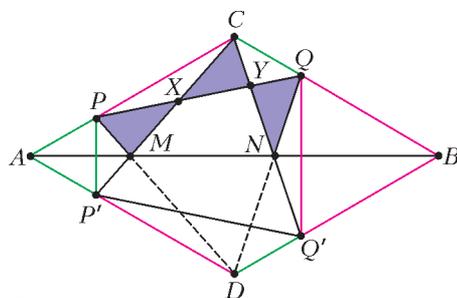


Рис. 6

Так как угол падения равен углу отражения, точка P' лежит на луче CM . Аналогично, точка Q' лежит на луче CN . Треугольник PAP' равнобедренный с углом 60° при вершине A , а значит, равносторонний. Аналогично, треугольник $Q'Q'$ равносторонний. Тогда все зеленые отрезки на рисунке равны, и все красные равны (так как сумма длин зеленого и красного отрезков равна длине стороны ромба). Треугольники CPP' , $Q'QC$ и $P'DQ'$ равны по первому признаку (углы между зеленой и красной стороной каждого из этих треугольников равны 120°). Отсюда треугольник $P'CQ'$ равносторонний. Симметричный ему относительно прямой AB треугольник DPQ тоже равносторонний. Значит, углы при вершинах P , C и Q синих треугольников равны по 60° . Треугольники $P'PC$ и $Q'QC$ также равны по первому признаку. Значит, углы XPC и XCP равны, т.е. треугольник PXC равнобедренный, откуда $XC = XP$. Тогда синие треугольники PXM и CXY равны по второму признаку. Аналогично, из равенства треугольников PCQ и $CQ'Q'$ получаем, что треугольник CYQ равнобедренный, а значит, равны синие треугольники CXY и NQY .

РАЗРЕЗАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

1. Решим сразу пункт б). Возьмем пример на рисунке 3 статьи, где стороны всех квадратов целые: например, можно взять разбиение, в котором прямоугольник, разбитый на квадраты, имеет размеры 33×32 (сначала указывается длина вертикальной стороны, потом – горизонтальной). Будем зашпатель плоскость далее по такому алгоритму. Приставляем к нашему прямоугольнику слева квадрат 33×33 (сторона к стороне), к получившемуся прямоугольнику размером 33×65 приставляем сверху квадрат 65×65 (сторона к стороне), к получившемуся прямоугольнику 98×65 приставляем справа квадрат 98×98 , затем приставляем снизу квадрат 163×163 , снова приставляем квадрат слева, и так далее. В результате мы заполняем плоскость «по спирали», и каждый новый квадрат имеет сторону, равную большей стороне прямоугольника, к которому он приставляется, – тем самым, он больше по размеру, чем все предыдущие квадраты.

(См. также: *F.V.Henle, J.M.Henle. Squaring the plane. – Amer.Math.Monthly, 115:1 (2008), 3–12; http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.138.7633&rep=rep1&type=pdf.*)

2. Нельзя.

Указание. Рассмотрите кубик наименьшего размера, примыкающий к одной из граней большого куба. Покажите, что к нему примыкает кубик еще меньшего размера, к тому – еще меньшего и т.д.

Подробное решение можно найти в статье Л.Курляндчика и Г.Розенблюма «Метод бесконечного спуска» в «Кванте» № 1 за 1978 год.

3. Нет.

Пусть это возможно. Из плана квартиры (см. рис. 8 статьи) видно, что сторона левой верхней комнаты длиннее, чем сторона правой верхней, та, в свою очередь, длиннее стороны правой нижней комнаты, та длиннее стороны левой нижней и, наконец, последняя длиннее стороны левой верхней. Получили, что сторона левой верхней комнаты длиннее самой себя, что невозможно.

4. Рассмотрим замкнутую цепочку ребер, не проходящую ни через какую вершину дважды (рис. 7). Она ограничивает некоторый многоугольник на плоскости. Запишем второе правило Кирхгофа для всех контуров, которые попали внутрь многоугольника, и сложим полученные уравнения. Тогда напряжения для всех ребер, не лежащих на границе многоугольника, сократятся. Действительно, каждое такое ребро входит в два контура: для одного из них направление стрелки на ребре совпадает с направлением обхода, для другого – противоположно направлению обхода. Для первого контура напряжение на ребре будет входить в уравнение со знаком плюс, а для второго – со знаком минус. Значит, сумма всех выписанных уравнений – это в точности второе правило Кирхгофа, только роль контура играет наша замкнутая цепочка.

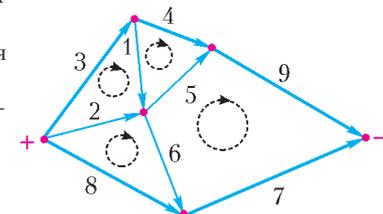


Рис. 7. Второе правило Кирхгофа для замкнутой цепочки ребер – это сумма вторых правил Кирхгофа для всех контуров внутри нее

5. Докажем сразу пункт б). Сначала заметим, что в цепи есть ненулевые токи. Действительно, запишем второе правило Кирхгофа для контура, содержащего батарейку. В правой части уравнения стоит напряжение батарейки – ненулевое число. Значит, одно из слагаемых в левой части не равно нулю,

т.е. сила тока через одно из ребер ненулевая. Теперь будем рассуждать, как в доказательстве принципа техники безопасности. Поменяем одновременно направление стрелки, знак силы тока и знак напряжения на каждом ребре с отрицательной силой тока. В частности, если ток через батарейку был отрицателен, то после нашей замены напряжение на ней станет отрицательно. Правила Кирхгофа по-прежнему будут выполняться. Начнем движение с ребра, на котором сила тока ненулевая, и будем двигаться в направлении стрелок, не заходя в ребра с нулевой силой тока. Мы можем неограниченно продолжать движение, и рано или поздно мы впервые получим замкнутую цепочку ребер.

Запишем второе правило Кирхгофа для этой цепочки (см. задачу 4 статьи). В левой части стоит положительное число.

Значит, в правой части тоже должно стоять положительное число. Но это возможно, только если контур проходит через батарейку. Поскольку мы двигались по ребрам с положительной силой тока, то ток через батарейку положителен, в частности ненулевой. Как мы отметили выше, если бы мы меняли направление стрелки на батарейке, то напряжение на ней стало бы отрицательно, т.е. в правой части выписанного уравнения стояло бы отрицательное число. Значит, ток через батарейку с самого начала (до смены направлений стрелок) был положителен.

6. Пусть силы тока в цепи до замены батарейки были I_1, I_2, \dots . Тогда I_1, I_2, \dots – решение системы уравнений, построенной по правилам Кирхгофа. Умножим каждое уравнение на число n . Тогда nI_1, nI_2, \dots – решение системы уравнений, полученной из исходной системы увеличением напряжения батарейки в n раз. Новая система соответствует правилам Кирхгофа после замены батарейки. По теореме единственности новая система других решений не имеет. Значит, nI_1, nI_2, \dots и есть силы тока в новой цепи.

7. Предположим, что такое разрезание возможно. Растянем наш квадрат в $\sqrt{2}$ раз вдоль одной из его сторон, он превратится в прямоугольник с отношением сторон $\sqrt{2}$. А прямоугольники, на которые он был разрезан, превратятся либо в квадраты, либо в прямоугольники с отношением сторон 2, каждый из которых можно разрезать на два квадрата! Получили, что прямоугольник с иррациональным отношением сторон (наш растянутый квадрат) разрезается на квадраты, а это противоречит теореме Дена.

8. 5:3.

Конечно же, можно выписать уравнения стыковки и решить систему. Но можно просто угадать ответ: видно, что если взять прямоугольники 4 и 5 размером 1×3 , прямоугольники 1 и 3 взять размером 2×2 , а прямоугольник 2 взять размером 1×1 , то мы получим разрезание, как на картинке, и искомое отношение сторон будет равно 5:3. По теореме единственности это и есть ответ.

9. Известное нам решение этой задачи очень сложное, и мы его не приводим.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Равновесие воздушных шаров. На перевернутом рисунке – равновесие сосудов с жидкостью.
2. Имея равный вес, цилиндры вытесняют одинаковые объемы ртути, а так как диаметры их равны, то одинаковы и глубины погружения.
3. Объем погруженной в воду части каждой коробочки меняется на одну и ту же величину. Поскольку сосуды одинаковы, то и уровень воды в каждом из них повысится одинаково.
4. Нет, так как вес вытесненной брусом воды равен весу бруска.

5. Нет, не выльется. Плотность материала кастрюли больше плотности воды, поэтому когда кастрюля утонет, она будет вытеснять меньший объем, нежели когда она плавала. Значит, уровень воды в ведре понизится.

6. На мелководье меньше действующая на человека выталкивающая сила.

7. Практически столько же, так как воду при погружении на такие глубины можно считать несжимаемой.

8. При нагревании ртуть расширяется сильнее, чем сталь, поэтому выталкивающая сила уменьшится, и шарик опустится глубже.

9. Да, может, если размеры тела близки к размерам сосуда.

10. Во втором сосуде пробковый цилиндр погрузился меньше, чем в первом, т.е. вытеснил меньше воды. Следовательно, второй сосуд тяжелее первого.

11. Допустим, что нить оборвалась. Тогда лед всплывет, и уровень воды в сосуде понизится. При дальнейшем таянии льда уровень воды уже меняться не будет.

12. Во втором, так как у бутылки внешний объем нижней части всегда больше объема верхней части.

13. Не изменяются, поскольку в весе одновременно теряют и судно, и вытесняемая им вода.

14. По мере поднятия увеличивается объем пузырька. Выталкивающая сила, пропорциональная объему пузырька, будет расти. На пузырек также будет действовать сила сопротивления, но она пропорциональна площади сечения пузырька и поэтому будет возрастать медленнее. Значит, движение пузырька будет ускоренным.

15. Гири нужно сделать из того же материала, что и взвешиваемое тело.

16. На одной и той же высоте над землей у шара из эластичной резины объем будет больше, чем у шара из прорезиненной ткани. Значит, выталкивающая сила, действующая на него, будет больше, и он поднимется выше.

17. Чем больше разница в плотностях воздуха и газа, заполняющего аэростат или дирижабль, тем больше подъемная сила. Следовательно, она возрастает при понижении температуры воздуха, когда он становится плотнее.

18. Дирижабль без газа внутри, конечно, стал бы легче, но его раздавило бы давление наружного воздуха.

19. Оболочка шара может не выдержать разности внутреннего и уменьшившегося внешнего давлений.

20. В принципе, можно – если сжимаемость газа больше сжимаемости тела.

Микроопыт

Можно. Для этого достаточно найти объем вытесненной телом воды, измерив сечение аквариума и изменение уровня воды при опускании в нее тела, и затем умножить этот объем на плотность воды.

И СНОВА ЗАДАЧИ НА СОПРОТИВЛЕНИЯ

1. а) Возрастет (или останется неизменным); б) уменьшится (или останется неизменным).
2. *Указание:* сопротивления верхней и нижней ветвей равны $2R + \frac{2Rr}{R + 2r}$, а сопротивление средней ветви равно $2R$.
3. Должно выполняться соотношение $\frac{z}{2 - z} = \frac{29}{12}$. Отсюда получаем $z = \frac{58}{41}$ Ом.
4. а) $\Delta R = 1\frac{7}{8}$ Ом $- 1\frac{13}{15}$ Ом $= \frac{1}{120}$ Ом (оценку сверху можно получить, вырезая по очереди каждое из пяти сопротивлений, а оценку снизу – закорачивая по очереди каждое из сопротивлений); б) $\Delta R = 6,994$ Ом $- 9,987$ Ом $= 0,007$ Ом

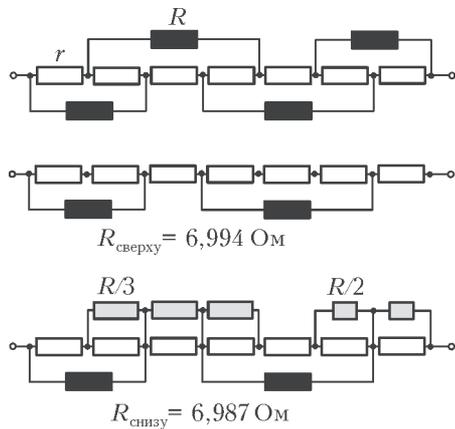


Рис. 8

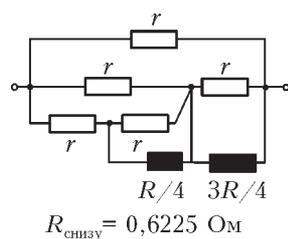


Рис. 9

(см. рис.8); в) $\Delta R = 0,625 \text{ Ом} - 0,6225 \text{ Ом} = 0,0025 \text{ Ом}$ (см. рис.9; для оценки сверху надо вырезать сопротивление R); г) $\Delta R = 0,7 \text{ Ом} - 0,662 \text{ Ом} = 0,038 \text{ Ом}$ (см. рис.10); д) $\Delta R = 0,55 \text{ Ом} - 0,5 \text{ Ом} = 0,05 \text{ Ом}$ (для оценки сверху увеличим сопротивления всех ребер сетки до R , а для оценки снизу уменьшим сопротивления

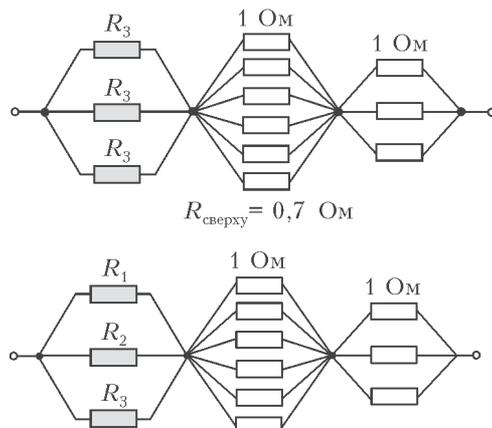


Рис. 10

$R_{\text{снизу}} = 0,662 \text{ Ом}$

R до r); е) $\Delta R = 0,55 \text{ Ом} - 0,5 \text{ Ом} = 0,05 \text{ Ом}$ (для оценки сверху увеличим сопротивления всех ребер сетки до R_1 , а для оценки снизу рассмотрим идеальную сетку с сопротивлением каждого ребра r).

ХІХ МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. а) 8811; б) 9.

Указание. Пусть $m = 1000a_1 + 100b_1 + 10c_1 + d_1$, $n = 1000a_2 + 100b_2 + 10c_2 + d_2$ — два четырехзначных числа ($m > n$). Тогда $m - n = 1000x + 100y + 10z + w$, где $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$, $z = c_1 - c_2$, $w = d_1 - d_2$, причем $x + y + z + w = 0$ и $x \leq 8$. Нетрудно видеть, что $y \leq 9$. Если $x = 8$, а $y = 9$, то $z + w = -17$ и имеются две возможности: $z = -9$, $w = -8$ либо $z = -8$, $w = -9$.

2. 125 км.

Указание. Из условия следует, что оба велосипедиста находились в пути одинаковое время. До первой встречи оба они вместе проехали путь AB . Следовательно, первый велосипедист (выехавший из A) каждый раз, когда они вместе проезжают путь AB , проходит 70 км. Поскольку до второй встречи они вместе прошли путь $3AB$, первый за это время прошел 210 км, после чего ему осталось проехать еще 40 км. Отсюда следует, что $2AB = 210 + 40 = 250$, т.е. $AB = 125$ км.

3. $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$.

Пусть a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — его высоты, p — его полупериметр, S — площадь, r — радиус вписанной окружности.

По известным формулам

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = rp.$$

Но тогда

$$3S = \frac{1}{2}(ah_a + bh_b + ch_c) = 3rp \quad (*)$$

во всяком треугольнике.

Заметим, что высота треугольника больше диаметра вписанной окружности, т.е. все высоты больше чем 2 и потому не меньше чем 3. Если хотя бы одна из высот больше трех, то из (*) следует, что

$$3rp > \frac{3}{2}(a + b + c) = 3p,$$

но тогда $r > 1$, что противоречит условию.

Итак, $h_a = h_b = h_c = 3$, и треугольник правильный.

4. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что

$$xy = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{xy}.$$

Откуда $\sqrt[4]{x^3y^3} \geq 2$, т.е.

$$x^3y^3 \geq 16. \quad (**)$$

Аналогично,

$$8xy = x^5 + y^5 \geq 2\sqrt{x^5y^5},$$

т.е.

$$4xy \geq \sqrt{x^5y^5}, \quad x^5y^5 \leq 16x^2y^2, \quad x^3y^3 \leq 16. \quad (***)$$

Из (*) и (***) следует, что

$$x^3y^3 = 16, \quad \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad x^5 = y^5; \quad x^2 = \sqrt[3]{16}.$$

Окончательно получаем $x = y = \sqrt[3]{4}$.

5. 60° .

Заметим, что (рис.11) $\triangle ADF = \triangle EDC$ (ибо $FD = DC$, $ED = AD$, $\angle ADF = \angle EDC = 120^\circ$). Поэтому $\angle AFD = \angle ECD$, а точки P, F, C и D лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle FPC = \angle FDC = 60^\circ$.

6. Бесконечно.

Возьмем любое натуральное число p . Тогда числа $m = p! - 1$, $n = p$, $k = p!$ удовлетворяют равенству $m! \cdot n! = k!$.

7. а) Нет; б) да: $1 + 2 + 3 = 6$; в) да: $1, 2, 3, 6$; г) да.

а) Если $x + y$ делится и на x , и на y , то будут целыми числа $1 + \frac{y}{x}$ и $1 + \frac{x}{y}$, что невозможно

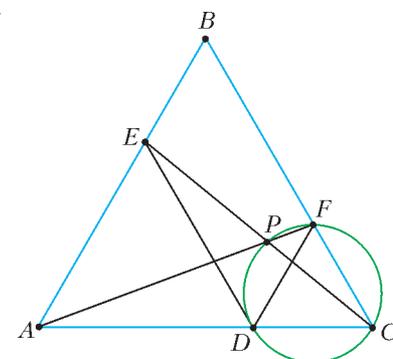


Рис. 11

при различных x и y . г) Если сумма чисел $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ делится на каждое из чисел a_1, a_2, \dots, a_n , то сумма $n + 1$ числа a_1, a_2, \dots, a_n , S делится на каждое из них.

ФИЗИКА

- $A = mg \left(H - \frac{s}{2 \sin 2\alpha} \right) = 12165 \text{ Дж}.$
- Понизится на $\Delta h = 1,5 \text{ см}$; $V_{II} = 420 \text{ см}^3.$
- $Q = F_{\text{тр}} \left(\frac{3}{2} L + \frac{5}{2} x \right) - \frac{3}{2} pSL = 240 \text{ Дж}.$
- $\omega = 4 \text{ рад/с}.$
- $B = \frac{Mg}{2bI}$, рамка поворачивается относительно стороны AE .
- $n = 2.$
- $T = \pi \sqrt{\frac{2mL^3}{kQq}} = 0,52 \text{ с}.$

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. 0.

Пусть $2n - 3, 2n - 1, 2n + 1, 2n + 3$ — четыре последовательных нечетных числа. Их произведение равно

$$(4n^2 - 1)(4n^2 - 9) = 16n^4 - 40n^2 + 9.$$

Если последняя цифра этого числа 9, то n делится на 5, и тогда в его десятичной записи перед девяткой стоит 0.

2. $\frac{ab}{c}.$

Пусть $y = k_1x + l_1, y = k_2x + l_2$ — уравнения прямых AB и CD соответственно (рис. 12). Числа a и b — корни уравнения

$x^2 = k_1x + l_1$, а c и d — корни уравнения $x^2 = k_2x + l_2$. Так как $l_1 = l_2$, то по теореме Виета $ab = cd$.

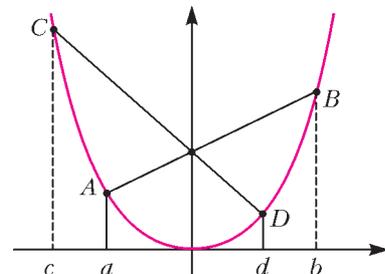


Рис. 12

3. Каждый из мудрецов, который видит четное число белых шляпок, поднимает правую руку, а видящий нечетное число белых шляпок — левую. Убедитесь в том, что мудрецы в белых (черных) шляпках поднимут одну и ту же руку.

4. $1/2.$

Указание. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 13).

По условию $AK \geq KB$, а потому $AO \geq OB$. Аналогично,

$BL \geq LC$ и $OB \geq OC$; $MC \geq DM$ и $OC \geq OD$; $DN \geq AN$ и

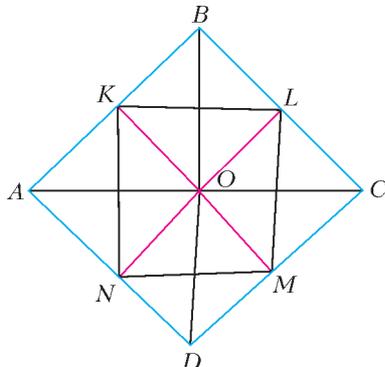


Рис. 13

$OD \geq AO$. Откуда следует, что $AO = BO = CO = DO$, т.е. четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O , а точки K, L, M, N — середины его сторон. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм, а площадь его равна половине площади четырехугольника $ABCD$.

5. Нет.

Квадрат нечетного числа при делении на 8 дает ос-

таток 1. Поэтому сумма квадратов шести нечетных чисел дает остаток 6. Однако число 2010 дает остаток 2.

6. Начинающий выигрывает.

Для этого ему нужно сначала получить два куса шоколадки размерами 50×99 и 50×99 , после чего он применяет «симметричную» стратегию: если второй игрок ломает один из кусков, то первый точно так же ломает такой же кусок. Если в какой-то момент после хода второго первый может отломить кусочек 1×1 , то он сделает это и выиграет.

7. Нет.

Если x, y — достаточно большие положительные числа, то все подмодульные выражения положительны и $x + a + x + y + b + y + c > x + x + y + y$, т.е. $a + b + c > 0$.

При достаточно больших по модулю отрицательных x и y имеем $-x - a - x - y - b - y - c > -x - x - y - y$, т.е. $a + b + c < 0$. Противоречие.

8. а) 12; б) 12.

Указание. а) Раскрасим доску 10×10 так, как показано на рисунке 14, а. Каждый прямоугольник 3×1 клетки обяза-

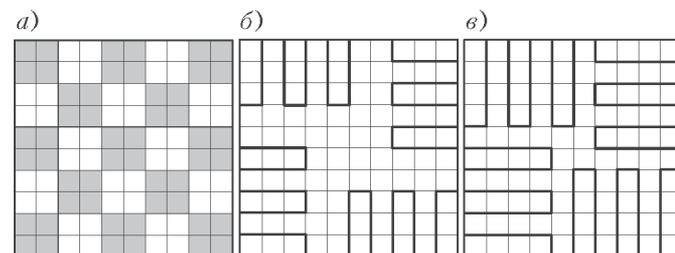


Рис. 14

тельно пересекается с одним из закрашенных квадратов 2×2 . При этом «залезать» в каждый из этих квадратов может только один прямоугольник. Следовательно, число удовлетворяющих условию прямоугольников 3×1 не может быть больше 12. На рисунке 14, б показано одно из возможных расположений 12 прямоугольников.

б) Ясно, что прямоугольников 1×4 не может уместиться больше, чем прямоугольников 1×3 , но мы приведем рассуждение, не опирающееся на пункт а). Квадрат 10×10 содержит 121 узел решетки, а прямоугольник 1×4 клетки — 10 узлов. Поэтому число прямоугольников 1×4 , не имеющих

общих точек, не больше чем $\left\lfloor \frac{121}{10} \right\rfloor = 12$.

А 12 прямоугольников закрасить можно (рис. 14, в).

9. $45^\circ.$

Указание. Проведем лежащую внутри квадрата $ABCD$ четверть окружности с центром в точке A и радиусом 1 (рис. 15). Докажите, что MN касается этой окружности. Для этого проведите касательную $M'N'$ к дуге, параллельную MN , и докажите, что периметр треугольника $M'N'C$ равен 2. Так как подобный ему треугольник MNC также имеет периметр 2, треугольники $M'N'C$ и MNC совпадают независимо от расположения MN относительно дуги. Теперь уже легко понять, что угол MAN равен 45° .

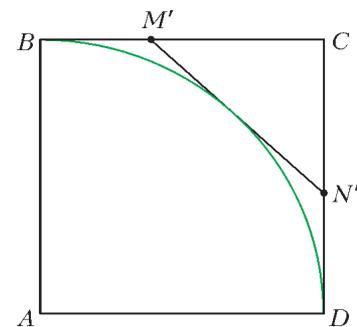


Рис. 15

10. 9.

Пусть k — количество грибов, собранных одним грибником. Тогда

$$(n + 11)k = n^2 + 9n - 2,$$

Очевидно, они должны быть горизонтальными. Возьмем один горизонтальный синий отрезок. Он пересекает 100 зеленых отрезков, которые должны быть вертикальными. Возьмем один вертикальный зеленый отрезок. Он пересекает 100 красных отрезков, и эти отрезки – горизонтальные. Продолжая рассуждать таким образом, мы обнаружим, что на картинке еще заведомо нарисованы 100 вертикальных синих, 100 горизонтальных зеленых и 100 вертикальных красных (возможно, один из этих красных отрезков – тот, с которого мы начали свои рассуждения). Итак, имеется не меньше 100 вертикальных и не меньше 100 горизонтальных отрезков каждого цвета, т.е. всего не меньше 600 отрезков.

3. Нет.

Покрасим вершины правильного 777-угольника поочередно в 3 цвета: белый, синий, красный, белый, синий, красный и т.д. Заметим, что если последовательно расставить в вершинах 777-угольника числа от 1 до 777, то числа a и b будут стоять в вершинах одного цвета тогда и только тогда, когда $(a - b) \div 3$.

Лемма 1. Если треугольник XYZ с вершинами в вершинах 777-угольника равнобедренный, то числа в его вершинах дают либо одинаковые, либо попарно разные остатки от деления на 3.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $XU = YZ$, в вершине X стоит число 1, в вершине Y стоит число $t + 1$, а в вершине Z – число $2t + 1$. Если t делится на 3, то у всех трех чисел остатки от деления на 3 одинаковы, а если не делится, то все три числа дают попарно разные остатки.

Лемма 2. Если для вершин A и B вершины C и D таковы, что треугольники ABC и ABD равнобедренные, то вершины C и D одного цвета.

Доказательство. Если точки A и B одного цвета, то по лемме 1 точки C и D того же цвета. Если точки A и B разного цвета – не умаляя общности, будем считать, что A синего цвета, B красного, – то по лемме 1 точки C и D белого цвета.

Заметим, что по лемме 2 после первого хода фишки попадут в вершины одинакового цвета и после каждого последующего хода будут находиться в вершинах одного цвета. Так как вершины, расположенные через одну, разного цвета, такую позицию мы никогда не получим, что и требовалось доказать.

4. Пусть прямая CD пересекает периметр треугольника в точках K и L (рис.18). Проверим, что одна из них удовлетворяет условию. Пусть это не так, тогда

$$KA + KB < KC + KD,$$

$$LA + LB < LC + LD.$$

Сложив, получаем $KA + KB + LA + LB < KC + KD + LC + LD = 2KL$. С другой стороны, складывая неравенства треугольника $KA + LA \geq KL$ и $KB + LB \geq KL$, получаем противоречие.

5. Автор этого решения – участник олимпиады Д.Клюев.

Поскольку $2011201120112011 \equiv 3 \pmod{4}$, то у этого числа есть простой делитель $p = 4k + 3$. Рассмотрим первое равенство по модулю p : $c \equiv -a$. С учетом этого второе равенство по модулю p можно записать в виде $(5a - b)(b - a) \equiv b^2$. Раскрывая скобки, имеем $5a^2 - 6ab + 2b^2 \equiv 0$. Умножая на 2, получаем, что $(3a - 2b)^2 + a^2$ делится на p . Поскольку $p = 4k + 3$, оба слагаемых должны быть кратны p . Отсюда a, b, c кратны p .

Замечание. Такие a, b, c существуют. Например, $a = 11k, c = 6k, b = 30k$, где $k = 2011201120112011/17$.

6. Не может.

Пару клеток, граничащих по углу, в которых стоят фишки, назовем *отличной*. Назовем клетку *восхитительной*, если она граничит по стороне с обеими клетками хотя бы одной отличной пары. Заметим, что для каждой отличной пары есть ровно две граничащие с ней восхитительные клетки. Для каждой отличной пары поставим в граничащие с ней восхитительные клетки по единице. После этого сложим в каждой клетке все поставленные числа. Заметим, что в каждой хорошей клетке получится число 1. Во всех остальных клетках результат равен либо 0, либо 2, либо 4

(рис.19). Если хороших клеток было ровно 2011, то сумма всех чисел должна быть нечетной. С другой стороны, сумма всех чисел в 2 раза больше, чем количество отличных пар, т.е. число четное. Значит, хороших клеток не может быть 2011.

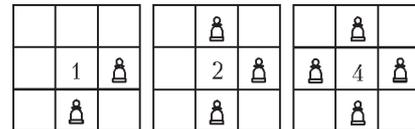


Рис. 19

7. Обозначим выписанное число через N . Пусть \overline{cd} – это остаток от деления N на p (цифры c, d могут быть нулями).

Тогда будем рассматривать 100 фрагментов десятичной записи числа N , соответствующие пятизначным числам вида $\overline{9cdyz}$. Эти фрагменты расположены в записи числа N подряд, причем для каждого из фрагментов количество знаков после \overline{cd} кратно пяти, так как после \overline{cd} в записи числа N идут две цифры x и y рассматриваемого фрагмента, потом идет много групп по 5 цифр, соответствующих пятизначным числам, а потом – еще три шестизначных числа (100000, 100001 и 100002).

Если мы заменим один из фрагментов \overline{cd} двумя нулями, число N в результате этой замены уменьшится на $\overline{cd} \cdot 10^{5k}$. Осталось выбрать тот фрагмент \overline{cd} , для которого множитель $(10^5)^k$ дает остаток 1 при делении на p , – тогда разность $N - \overline{cd} \cdot 10^{5k}$ будет делиться на p , что нам и требуется. Этот выбор возможен, так как мы выбираем из 100 подряд идущих значений показателя степени k , а остатки 10^5 по модулю p образуют чисто периодическую последовательность с периодом не больше $p - 1 < 100$.

8. Отметим на отрезке AC такую точку F , что $AE = CF$ (рис.20). Тогда равенство из условия задачи можно записать в виде $BD:BE = CF:CE$, откуда

$DF \parallel BC$ и треугольники FDE и CBE подобны. Но треугольники ADE и CDF равны, значит, $DE = DF$, треугольник FDE равнобедренный, а вместе с ним и треугольник CBE равнобедренный, что и требовалось доказать.

9. Предположим противное. Если найдется угрюмовитянин X , имеющий хотя бы 2000 знакомых, то по условию среди его знакомых найдутся три попарно знакомых человека. Тогда они вместе с X образуют четверку попарно знакомых друг с другом жителей. Следовательно, у каждого угрюмовитянина не более 1999 знакомых. Возьмем жителя A_1 и удалим его из города вместе с его не более чем 1999 знакомыми. Из оставшихся выберем жителя A_2 и тоже удалим его вместе с его не более чем 1999 знакомыми. Так последовательно мы выберем жителей $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$, не знакомых друг с другом. Рассмотрим теперь всех угрюмовитян, кроме этой тысячи.

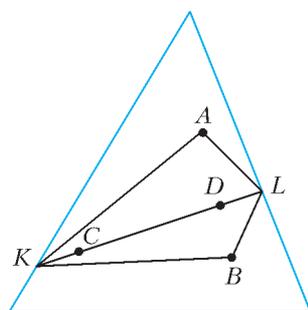


Рис. 18

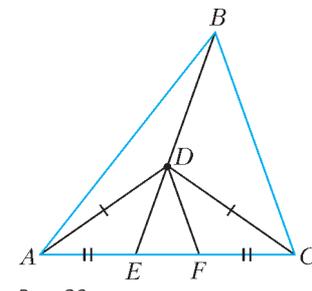


Рис. 20

Возьмем жителя B_1 и удалим его вместе с его не более чем 1999 знакомыми. Из оставшихся выберем жителя B_2 и удалим его вместе с его не более чем 1999 знакомыми и т.д. После того как мы последовательно выберем жителей B_1, B_2, \dots, B_{999} , в качестве B_{1000} возьмем любого из еще оставшейся тысячи жителей. Найденные жители также не знакомы друг с другом. Теперь рассмотрим 2000 угрюмовитян $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{1000}$. Среди них есть трое попарно знакомых. Но тогда двое из этих трех либо жители A_i и A_j , либо жители B_i и B_j . Но ни те, ни другие между собой не знакомы. Противоречие.

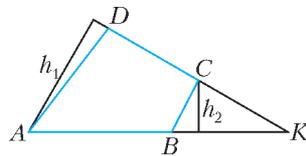


Рис. 21

А так как при этом углы в четырехугольнике $ABCD$ меньше 150° , то в треугольнике BKC угол K наименьший. Действительно,

$$\angle KBC = 180^\circ - \angle ABC > 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

и

$$\angle KCB = 180^\circ - \angle BCD > 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

Следовательно, наименьшая сторона в треугольнике KBC — это BC .

Опустим перпендикуляры из точек A и C на прямые CD и AB соответственно. Обозначим длины этих перпендикуляров через h_1 и h_2 соответственно. Поскольку $\angle K = 30^\circ$, то

$$h_1 = \frac{1}{2}(AB + BK) > \frac{1}{2}(AB + BC) \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{1}{2}KC > \frac{1}{2}BC.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(ABC) + S(ACD) = \\ &= \frac{1}{2}(AB \cdot h_2 + CD \cdot h_1) > \frac{1}{4}(AB \cdot BC + CD \cdot (AB + BC)) = \\ &= \frac{1}{4}(AB \cdot CD + AB \cdot BC + BC \cdot CD). \end{aligned}$$

11. $a_1 = 37^2 = 1369$.

Заметим, что $p_n = 37$ при всех n . Действительно, если

$p_n \neq 37$ для некоторого n , то число $a_{n+1} = a_n - p_n + \frac{a_n}{p_n}$ не делится на 37, так как a_n и $\frac{a_n}{p_n}$ делятся на 37, а вычитаемое p_n не делится. Таким образом, $a_{n+1} = a_n - 37 + \frac{a_n}{37} = \frac{38}{37}a_n - 37$ при всех n .

Положим $b_n = a_n - 37^2$, тогда

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - 37^2 = \frac{38}{37}a_n - 37 - 37^2 = \\ &= \frac{38}{37}(b_n + 37^2) - 37 \cdot 38 = \frac{38}{37}b_n. \end{aligned}$$

Отсюда по индукции следует, что

$$b_n = \frac{38^{n-1}}{37^{n-1}}b_1$$

при всех n . Дробь $\frac{38^{n-1}}{37^{n-1}}$ несократима и ее знаменатель неограниченно растет с ростом n , поэтому число $b_n = \frac{38^{n-1}}{37^{n-1}}b_1$ может оставаться целым при всех n только в случае, когда $b_1 = 0$. Следовательно, $a_1 = b_1 + 37^2 = 37^2$.

Осталось заметить, что число $a_1 = 37^2$ удовлетворяет условию, так как в этом случае все члены a_n равны 37^2 .

12. 27 нечетных чисел.

Сначала покажем, как действовать Саше, чтобы среди чисел

никогда не оказалось больше 27 нечетных. Разобьем все вершины на четверки, каждая из которых содержит две соседние вершины и две противоположные им (в первую четверку включим вершины номер 1, 2, 51 и 52, считая по часовой стрелке, во вторую — вершины номер 3, 4, 53 и 54 и т.д.). Пусть Саша в начале игры поставит в каждую четверку одно нечетное число и три четных. Тогда он сможет восстанавливать такую ситуацию после каждого своего хода. Действительно, Сережа своим ходом изменит четность у каких-то двух чисел из одной четверки, после чего в этой четверке окажется либо одно, либо три нечетных числа. Если их станет три, то среди них найдутся два соседних и Саша своим ходом сможет превратить их в четные. Если же в четверке останется одно нечетное число, то Саша прибавит по единице к нему и его соседу из той же четверки и в четверке по-прежнему будет ровно одно нечетное число. Таким образом, после каждого хода Саши в каждой четверке будет ровно одно нечетное число, а всего будет ровно 25 нечетных чисел. Своим ходом Сережа может изменить это количество не более чем на 2, поэтому после каждого его хода среди чисел будет не более 27 нечетных.

Теперь покажем, как следует действовать Сереже, чтобы в какой-то момент после своего хода он получил не менее 27 нечетных чисел. Ему достаточно добиться того, чтобы перед каким-то его ходом образовалось не менее 25 нечетных чисел. Действительно, если в этот момент количество нечетных чисел меньше 50, то найдется пара противоположных вершин, в которых стоят четные числа (так как вершины разбиваются на 50 пар противоположных). Прибавив по единице к числам в этих вершинах, Сережа увеличит количество нечетных чисел на 2, и в результате их окажется хотя бы 27. Если же нечетных чисел 50 или больше, то Сережа может сделать любой ход и после этого останется не менее 48 нечетных чисел. Осталось показать, как Сереже добиться того, чтобы перед каким-то его ходом образовалось не менее 25 нечетных чисел. Раскрасим вершины через одну в черный и белый цвета и заметим, что противоположные вершины окрашены одинаково, а соседние — по-разному. Сережа может следить только за количеством нечетных чисел в белых вершинах. Если перед очередным его ходом количество нечетных чисел в белых вершинах меньше 25, то найдется пара противоположных белых вершин, в которых стоят четные числа (так как белые вершины разбиваются на 25 пар противоположных). Пусть Сережа прибавит по единице к такой паре вершин — в результате количество нечетных чисел в белых вершинах увеличится на 2. Следующий ход Саши затронет только одну из белых вершин, поэтому в результате пары ходов количество нечетных чисел в белых вершинах увеличится. Действуя таким образом, Сережа добьется того, что перед каким-то его ходом нечетных чисел в белых вершинах (а значит, и всего) будет не менее 25. После этого, как объяснено выше, он получит не менее 27 нечетных чисел после своего хода.

13. По отношению к описанной окружности треугольника ABC угол ABC , равный 30° , является вписанным, следовательно, центральный угол AOC равен 60° (рис.22). Таким образом, треугольник AOC равносторонний. Значит, четырехугольник $AOLC$ составлен из равностороннего и равнобедренного треугольников, линия AL — его ось симметрии, следовательно, AL — биссектриса угла OAC . Пусть $\angle OBA = \angle BAO = \alpha$. Тогда $\angle BAL = 30^\circ + \alpha$. Далее, $\angle KOA = 2\alpha$, $\angle OKC = 60^\circ + 2\alpha$ (в обоих случаях мы подсчитывали величину внешнего угла

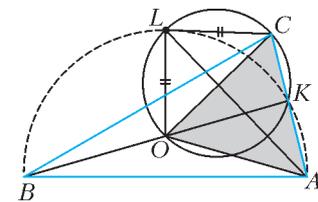


Рис. 22

треугольника). Наконец,

$$\angle BKL = \frac{1}{2} \angle OKC = 30^\circ + \alpha = \angle BAL.$$

Следовательно, точки A, B, L, K лежат на одной окружности.

14. Положим $N = 10^{300}$. Заметим, что расстояние между любыми двумя соседними квадратами, большими N , больше 10^{100} . Действительно, расстояние между числами k^2 и $(k+1)^2$ равно $2k+1$, и это число больше 10^{100} при $k \geq \sqrt{N} = 10^{150}$. Аналогично, расстояние между соседними кубами, большими N , больше 10^{100} , так как расстояние между k^3 и $(k+1)^3$ равно $3k^2 + 3k + 1$, что больше 10^{100} при $k \geq \sqrt[3]{N} = 10^{100}$.

Рассмотрим любое натуральное n , для которого число 2^n больше N и не является ни квадратом, ни кубом (для выполнения второго условия достаточно выбрать n не делящимся ни на 2, ни на 3). Докажем, что хотя бы одно из чисел 2^n , 2^{n+30} или 2^{n+60} далеко от квадратов и кубов.

Рассмотрим случай, когда число 2^n близко к квадратам, т.е. $|2^n - k^2| \leq 10^6$ для некоторого k . Так как 2^n не может быть равно k^2 , имеем

$$1 \leq |2^n - k^2| \leq 10^6.$$

Умножая это неравенство на 2^{30} и 2^{60} , получаем

$$2^{30} \leq |2^{n+30} - (2^{15}k)^2| \leq 10^6 \cdot 2^{30}$$

и

$$2^{60} \leq |2^{n+60} - (2^{30}k)^2| \leq 10^6 \cdot 2^{60}.$$

Так как $2^{60} > 2^{30} > 10^6$, расстояния от чисел 2^{n+30} и 2^{n+60} до соответствующих квадратов $(2^{15}k)^2$ и $(2^{30}k)^2$ больше 10^6 . С другой стороны, расстояния от чисел 2^{n+30} и 2^{n+60} до квадратов, соседних с рассматриваемыми, не меньше чем

$$10^{100} - 10^6 \cdot 2^{60} > \frac{1}{2} \cdot 10^{100} > 10^6,$$

$$\text{так как } 10^6 \cdot 2^{30} < 10^6 \cdot 2^{60} < \frac{1}{2} \cdot 10^{100}.$$

Таким образом, если число 2^n близко к квадратам, то 2^{n+30} и 2^{n+60} далеки от квадратов. Применяя это утверждение к числу $n+30$ вместо n , получаем, что если 2^{n+30} близко к квадратам, то 2^{n+60} далеко от квадратов. Итак, среди чисел 2^n , 2^{n+30} и 2^{n+60} имеется не более одного числа, близкого к квадратам.

Аналогично доказывается, что не более одного из чисел 2^n , 2^{n+30} и 2^{n+60} близко к кубам (при умножении числа k^3 на 2^{30} и 2^{60} получаются тоже кубы: $(2^{10}k)^3$ и $(2^{20}k)^3$ соответственно). Следовательно, хотя бы одно из чисел 2^n , 2^{n+30} или 2^{n+60} далеко и от квадратов, и от кубов. Поскольку n можно выбрать сколь угодно большим, отсюда следует, что искомым степеней двойки бесконечно много.

15. Рассмотрим граф, вершинами которого являются члены общества, а ребрами соединены пары друзей. Докажем, что этот граф является деревом. Ясно, что граф связан, иначе невозможно было бы перемещать средства между компонентами связности. Осталось доказать, что в графе нет циклов.

Предположим противное: пусть вершины A_1, A_2, \dots, A_n образуют цикл. Для краткости введем обозначения $A = A_1$ и $B = A_2$. По условию несколькими переводами можно переместить 1 рубль из A в B , т.е. добиться того, что счет вершины A уменьшится на 1, счет вершины B увеличится на 1, а счета

остальных вершин не изменятся. Рассмотрим такой способ, в котором суммарное количество переводов – наименьшее из возможных. Ясно, что порядок переводов не важен: результат определяется тем, сколько переводов сделано из каждой вершины.

Заметим, что найдется хотя бы одна вершина, из которой переводов не делалось. Действительно, в противном случае можно было бы уменьшить на 1 количество переводов из каждой вершины, от чего результат, как легко видеть, не изменился бы. Назовем вершины, из которых не делалось переводов, *нулевыми*. Вершина A не может быть нулевой, так как ее счет должен в итоге уменьшиться, а уменьшение счета происходит только при переводах из этой вершины. Рассмотрим любую нулевую вершину C . Если она отлична от B , то все ее соседи – тоже нулевые, иначе счет в этой вершине увеличился бы. Если эти соседи отличны от B , то, аналогично, их соседи тоже нулевые, и так далее. Поскольку C можно соединить путем с B , отсюда следует, что вершина B тоже нулевая. В результате всех переводов счет в вершине B должен увеличиться на 1 и это увеличение уже достигается переводом из A . Значит, все остальные соседи вершины B должны быть нулевыми. В частности, вершина A_3 – нулевая. Поскольку A_3 отлична от B , все ее соседи тоже нулевые, в том числе A_4 . Применяя это рассуждение к вершинам цикла по очереди, в итоге получаем, что и вершина A должна быть нулевой. Противоречие.

Полученное противоречие доказывает, что в графе нет циклов, а так как он связной, то он является деревом. В любом дереве количество ребер на 1 меньше, чем количество вершин, следовательно, в нашем графе ровно 2010 ребер, что и требовалось.

КВАНТ+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, В.Н.Власов, А.Е.Пацхверия,
М.В.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

**Журнал «Квант+» зарегистрирован в Федеральной
службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство ПИ № ФС77-45551**

Тираж 2500 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант+»

Тел.: 930-56-48

E-mail: math@kvantjournal.ru, phys@kvantjournal.ru

Сайт: kvantjournal.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными материалами
в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru**